

Guía de estudio

MATEMÁTICA C

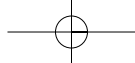
Educación Adultos 2000

0800-999-33822

www.buenosaires.gov.ar/educacion/comunidad/adultos2000

Material de distribución gratuita

gobBsAs
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN



Programa Educación Adultos 2000

Coordinador pedagógico:

Lic. Roberto Marengo

Equipo técnico-pedagógico:

Lic. Valeria Cohen

Lic. Daniel López

Lic. Norma Merino

Lic. Noemí Scaletzky

Lic. Alicia Zamudio

Matemática C

Coordinadores:

Prof. Dora Guil

Prof. Ernesto Maqueda

Equipo docente:

Prof. Carlos Battilana

Prof. Matías Bruzzoni

Prof. Silvia García Bonelli

Prof. Nora Di Lascio

Prof. Gerardo Feres

Prof. Claudio Mayayo

Prof. Claudia Mazzeo

Prof. Susana Muñoz

Prof. Gabriela Otero

Asesores de alumnos:

María Alem

Fernando Piquero

Guía de estudios Matemática C

Coordinación de la producción y edición:

Lic. Norma Merino

Lic. Noemí Scaletzky

Especialistas en contenidos:

Prof. Dora Guil

Prof. Ernesto Maqueda

Procesamiento didáctico:

Lic. Betina Akselrad

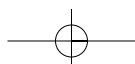
Lic. Alejandra Amantea

Supervisión legal:

Dra. Fabiana Leonardo

Diseño gráfico y diagramación:

Juan Carlos Badino



Guía de estudio

MATEMÁTICA



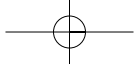
Educación Adultos 2000

0800-999-33822

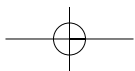
www.buenosaires.gov.ar/educacion/comunidad/adultos2000

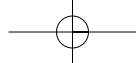
gobBsAs

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN



*Nuestro sincero recuerdo y agradecimiento a Beatriz Marelli,
con quien tuvimos el placer de compartir tantos años de trabajo y aprendizajes.*

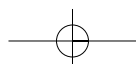


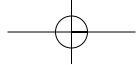


ÍNDICE

MATEMÁTICA

PRESENTACIÓN DE LA MATERIA	7
Cómo estudiar	8
¿Qué es necesario saber para trabajar con los contenidos de Matemática C?	9
Actividades de anticipación	11
Orientaciones sobre las actividades de anticipación	13
Programa	17
Bibliografía	18
UNIDAD 1:	
CONJUNTO DE NÚMEROS REALES	19
Propósitos de la unidad	19
Actividad N° 1: “Elaboración de un medicamento”	19
Actividad N° 2: “Intercalando números”	21
En términos matemáticos: Densidad en el conjunto de números racionales (\mathbb{Q})	23
Actividad N° 3: “Los canteros del parque”	24
En términos matemáticos: Conjunto de números irracionales	25
En términos matemáticos: Conjunto de números reales	26
En términos matemáticos: Densidad en el conjunto de números reales (\mathbb{R})	27
En términos matemáticos: Módulo de un número real	28
Actividad N° 4: “Para cuidar un equipo”	29
Actividad N° 5: “Trabajando con el libro”	30
UNIDAD 2:	
FUNCIONES	33
Propósitos de la unidad	33
Actividad N° 1: “Optimización del proceso de elaboración de una sustancia”	33
En términos matemáticos: Función suryectiva o sobreyectiva	38
En términos matemáticos: Función inyectiva y función biyectiva	39
En términos matemáticos: Dominio natural de una fórmula	44
Actividad N° 2: “Presupuesto para la compra de cemento”	44
En términos matemáticos: Fórmula compuesta	46
En términos matemáticos: Función compuesta	49
En términos matemáticos: Fórmula inversa	52
En términos matemáticos: Función inversa	56
Actividad N° 3: “Temperatura de la sustancia durante su elaboración”	57
En términos matemáticos: Función creciente y función decreciente	59
En términos matemáticos: Máximos y mínimos locales o relativos	60
Actividad N° 4: “Informe sobre el proceso de elaboración de la sustancia”	61
En términos matemáticos: Teorema de Bolzano	64
En términos matemáticos: Consecuencia del teorema de Bolzano	65





UNIDAD 3:

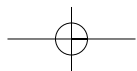
FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA	67
Propósitos de la unidad	67
Actividad N° 1: “Reproducción de bacterias”	67
En términos matemáticos: Fórmula exponencial	72
En términos matemáticos: Función exponencial	75
En términos matemáticos: Logaritmo en base 2	80
En términos matemáticos: Función logarítmica	84
Actividad N° 2: “La fortuna de Martín”	84
Actividad N° 3: “Operaciones con logaritmos”	87
En términos matemáticos: Propiedades de los logaritmos	88
Actividad N° 4: “Depósitos bancarios”	89
Actividad N° 5: “Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas”	91
En términos matemáticos: Fórmula de cambio de base	94
Actividad N° 6: “Trabajando con el libro”	95

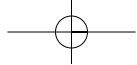
UNIDAD 4:

FUNCIÓNES TRIGONOMÉTRICAS	97
Propósitos de la unidad	97
Actividad N° 1: “Rampas de acceso”	98
Actividad N° 2: “Rampas para carga y descarga”	102
En términos matemáticos: Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo ...	104
Actividad N° 3: “Trabajando con el libro”	106
Actividad N° 4: “Un juego para computadoras”	107
En términos matemáticos: La identidad pitagórica	118
Actividad N° 5: “Trabajando con el libro”	118

UNIDAD 5:

SUCESIONES	121
Propósitos de la unidad	121
Actividad N° 1: “El alquiler de un micro”	121
En términos matemáticos: Sucesiones. Término de la sucesión. Término general. . .	123
Actividad N° 2: “Diseño de piezas para un juego”	124
Actividad N° 3: “El negocio de venta de lavandina”	126
En términos matemáticos: Sucesión (o progresión) aritmética. Diferencia o razón. .	130
Actividad N° 4: “La reproducción de las bacterias”	130
En términos matemáticos: Sucesión (o progresión) geométrica. Razón	131
Actividad N° 5: “Trabajando con el libro”	132





UNIDAD 6:

PROBABILIDAD 133

 Propósitos de la unidad 133

 Actividad N° 1: “Diferentes formas de armar un menú” 133

 En términos matemáticos: Regla básica del conteo 135

 Actividad N° 2: “Elecciones internas de un partido político” 137

 En términos matemáticos: Factorial de un número. Permutaciones. 137

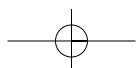
 En términos matemáticos: Permutaciones de n objetos tomados de a x 139

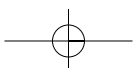
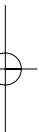
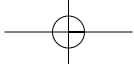
 Actividad N° 3: “Un kilo de helado” 139

 En términos matemáticos: Combinaciones de n elementos tomados de a x.

 Número combinatorio 141

 Actividad N° 4: “Trabajando con el libro” 142





Presentación de la materia

MATEMÁTICA

Al iniciar el trabajo con **Matemática C** usted ya ha transitado un camino de aprendizaje de nociones matemáticas: ha concluido la escolaridad primaria y ha aprobado **Matemática A y B** en **Educación Adultos 2000**, o su equivalente en otra etapa o institución. Esto significa que no se acerca ahora a la Matemática por primera vez. Sin embargo sus experiencias al respecto pueden ser muy variadas.

Quienes diseñamos la propuesta de enseñanza de Matemática en Educación Adultos 2000, partimos de **algunas ideas generales a partir de las cuales construimos un modo de trabajo que intenta favorecer el estudio de esta materia y consideramos fundamental compartirlas con nuestros alumnos desde el inicio**. Por esto le presentamos aquí las ideas que orientan nuestro trabajo como docentes de Matemática:

- Sin duda, usted utiliza en la vida diaria una gran cantidad de nociones matemáticas sin darse cuenta de ello; las usa eficientemente y de manera tal que le permiten resolver diferentes situaciones relativas a su vida cotidiana.
- Partiendo de esta “experiencia matemática” incorporada a la vida diaria es posible avanzar hacia la interpretación de los conceptos matemáticos que allí entran en juego y trasladarlos a situaciones más complejas.
- Cada nuevo concepto matemático que se aprende se apoya en otros ya adquiridos como si se tratara de hileras de ladrillos que se asientan unas en otras para que la pared que se construye sea sólida.
- Cada adquisición pasa por una serie de etapas que van desde lo más concreto y ligado a nuestra experiencia cotidiana, hacia niveles de complejidad y abstracción cada vez mayores.
- En tanto la Matemática se expresa a través de un sistema de símbolos y representaciones gráficas que le es propio, es necesario hacer comprensible este lenguaje desde su significado matemático y su relación con situaciones concretas.
- Si favorecemos que estas etapas se cumplan sin saltar ninguna, respetando los ritmos de avance de cada alumno, usted podrá aprender Matemática aún cuando sus experiencias anteriores con esta materia no le hayan ofrecido esta sensación.

En resumen, le proponemos aprender Matemática de una manera semejante a la que el hombre ha seguido en la creación de las ideas matemáticas: descubriendo los conceptos a partir de situaciones que podrían presentarse en la realidad, o de problemas pertenecientes a otras ciencias que utilizan conceptos matemáticos para resolverlos.

Conociendo cuáles son nuestros puntos de partida, le será más sencillo comprender el modo de trabajo que le proponemos desarrollar.

¿Cómo estudiar?

A partir de estas ideas hemos pensado este material de enseñanza como un recurso a través del cual usted pueda aprender conceptos matemáticos y el lenguaje que los expresa.

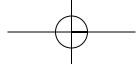
En cada Unidad usted encontrará:

- Una presentación en la que se describen las principales nociones que se abordarán y los **Propósitos** a alcanzar en relación con esas nociones y contenidos.
- **Actividades** que presentan situaciones de trabajo y problemas concretos para resolver y analizar. Cada una de ellas representa un camino hacia los conceptos matemáticos y al lenguaje que los expresa. Muchas de estas actividades tienen distintas **Partes**. Algunas de estas Actividades o Partes serán **indicaciones para leer los textos recomendados**. Estas le señalarán qué texto deberá usar, qué páginas del mismo deberá consultar y qué actividades de las propuestas en el libro deberá resolver.
- Comentarios bajo el título **Orientaciones**, que lo invitan a reflexionar sobre su trabajo y a verificar su camino de resolución de las diferentes partes de las actividades.
- Indicaciones para retomar conceptos, en aquellos casos en los que la resolución de la actividad requiera que recuerde algunos conceptos matemáticos aprendidos en una etapa anterior.
- Apartados especiales denominados **En términos matemáticos**, destinados a formalizar los conceptos que usted vaya construyendo a partir de su trabajo con las distintas partes de cada Actividad. En estos apartados presentaremos también el lenguaje que utiliza la Matemática para expresar dichos conceptos.
- **Ejercicios de integración**, que usted deberá resolver al finalizar cada unidad. La resolución de estos ejercicios le permitirá sintetizar los temas trabajados en la unidad, aplicar los conceptos y la simbología estudiados a la resolución de nuevas situaciones, vincular entre sí los conceptos y estudiar algún otro aspecto de los mismos que no fue tratado en el desarrollo de la unidad. Su resolución le dará también la oportunidad de decidir si está en condiciones de seguir avanzando con el estudio de la unidad siguiente o si todavía necesita detenerse un tiempo más en la unidad que está estudiando, retomando aquellas cuestiones que no haya podido resolver. No deje de realizarlos.

Encontrará los enunciados de estos ejercicios en el **Anexo de la Guía de Estudio de Matemática C**.

- **Actividades de Autoevaluación**, que se presentarán al concluir el desarrollo de las seis unidades y le permitirán evaluar su propio recorrido de aprendizaje de los conceptos de la materia y la adquisición del lenguaje matemático correspondiente.

Encontrará los enunciados de estas actividades en el **Anexo de la Guía de Estudio de Matemática C**.



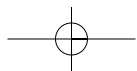
La **Guía de estudio** constituye la herramienta fundamental para el aprendizaje de los contenidos de la materia. Por lo tanto, un uso adecuado de la misma favorecerá su proceso de aprendizaje. Para ello tenga en cuenta las siguientes recomendaciones:

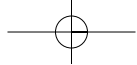
- Respete el orden de presentación de los temas y las actividades.
- Resuelva cada una de las actividades a medida que se van presentando.
- No se anticipe leyendo las Orientaciones o los apartados En términos matemáticos. Estos solo tendrán sentido para usted si previamente realizó la actividad propuesta.
- Recorra al trabajo con los textos cada vez que la Guía lo señala.
- No dude en recurrir a las consultorías si lo necesita. Tenga en cuenta que estas le ofrecen un espacio de consulta y orientación al tiempo que le permiten intercambiar y compartir el trabajo con otros alumnos.
- Si no puede asistir a consultorías presenciales, puede acercarnos sus dudas a través del correo electrónico, el buzón de actividades o las consultorías telefónicas.
- Utilice un cuaderno o carpeta para resolver por escrito las actividades propuestas en la Guía, escribir sus dudas y realizar anotaciones vinculadas con la lectura de los textos recomendados. Tenga en cuenta que **las actividades propuestas deben ser resueltas por usted mismo** y este trabajo le irá indicando qué ha comprendido y cuáles son sus dificultades. Tener registro de esto facilitará su tarea y le resultará un material fundamental para trabajar en las consultorías.
- Vaya registrando de algún modo que le resulte útil, toda la simbología matemática que la Guía vaya presentando, de modo que pueda tenerla presente siempre que sea necesario.

¿Qué es necesario saber para trabajar con los contenidos de Matemática C?

Al presentar la materia sosteníamos que:

- Cada nuevo concepto matemático que se aprende se apoya en otros ya adquiridos como si se tratara de hileras de ladrillos que se asientan unas en otras para que la pared que se construye sea sólida.
- Al iniciar el trabajo con **Matemática C** usted ya ha transitado un camino de aprendizaje de nociones matemáticas.
- En **Matemática C** usted aprenderá una serie de conceptos que se apoyan en otros que deberían formar parte de sus adquisiciones previas. Por esto es importante asegurarse el manejo de aquellas nociones que resultan necesarias para la “construcción” de los nuevos conceptos que aprenderá.





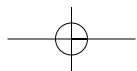
Las nociones previas fundamentales para comenzar con el estudio de **Matemática C** son **Ecuaciones, Relaciones y Funciones**. Pero no se preocupe si considera que “recuerda poco” de lo que aprendió en una etapa anterior o que nunca trabajó antes con estos temas. Lo acompañaremos y orientaremos para que pueda hacerlo ahora.

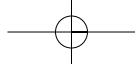
Para ello le proponemos empezar el trabajo tratando de realizar las **Actividades de anticipación**. Este primer trabajo le servirá como un ensayo para “entrar en tema”. Su realización es fundamental para poder empezar a abordar los contenidos de la materia. Por eso, **no las pase por alto**.

Es importante que para realizarlas tenga en cuenta las siguientes sugerencias:

- Trate de resolverlas con los elementos que recuerda, o bien con sus propias intuiciones matemáticas.
- No intente ir primero a buscar información en un libro de niveles anteriores. Si lo hace no podrá evaluar qué actividades está en condiciones de resolver con sus propios recursos y qué necesitará revisar para avanzar con el trabajo de esta materia.
- No se preocupe por las cuestiones que no pueda resolver. Justamente el sentido de este trabajo es que usted pueda detectar aquello que es necesario revisar. A través de la Guía de Estudio, lo orientaremos en el camino a seguir, teniendo en cuenta las dificultades que se le puedan presentar.
- El hecho de tener que revisar algunos conceptos previos no significa que usted se “atrase”. Por el contrario, afianzar algunas nociones que son básicas para transitar el programa de esta materia le permitirá asegurarse la posibilidad de acceder a nociones nuevas. Como en el ejemplo que utilizamos en la presentación, si un albañil pone de manera desordenada los ladrillos de la primera hilera del muro porque trabaja rápido sólo conseguirá al final de la obra una pared torcida que a la larga le requerirá mucho más tiempo y más trabajo: deberá, en definitiva, hacerla nuevamente.

Ponga atención a las consignas y siga las orientaciones que se le presentan en relación con cada resolución.





ACTIVIDADES DE ANTICIPACIÓN

Actividad N° 1

Se desea saber la cantidad x de empleados que tiene una fábrica. Para averiguarlo se cuenta con la siguiente información:

La fábrica dividió el pago de sueldos de sus empleados en dos grupos. El primer grupo, que está formado por las dos quintas partes del total de empleados, cobra la primera semana del mes. El otro grupo, que está formado por los 30 empleados restantes, cobra la segunda semana del mes.

- Sólo una de las ecuaciones que se dan a continuación traduce la situación anterior. Seleccione la ecuación correcta.

$$\frac{2}{5}x + x = 30$$

$$\frac{2}{5}x + 30 = x$$

$$x : \frac{2}{5} + 30 = x$$

$$x : \frac{2}{5} + x = 30$$

- Resuelva la ecuación que seleccionó en el ítem 1.

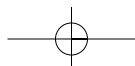
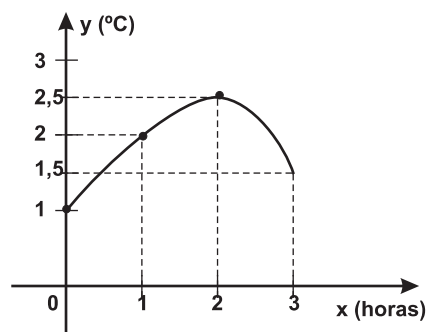
Actividad N° 2

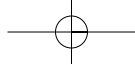
Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}(x - 5) = 3 - \left(x + \frac{1}{4}\right)$$

Actividad N° 3

- El siguiente gráfico representa la temperatura y de una sustancia en cada instante x , mientras se realizaba un experimento, entre la hora cero y la hora 3.





- a) ¿Qué temperatura tiene la sustancia en la hora $x = 1$?
 - b) ¿En qué hora x la sustancia tiene $2,5$ °C?
 - c) El par $(3 ; 1,5)$, ¿pertenece al gráfico?
 - d) ¿Qué significa de acuerdo con la situación concreta planteada que el par $(0 ; 1)$ pertenezca al gráfico?
2. Si interpretamos el gráfico dado anteriormente como una relación $f: [0 ; 3] \rightarrow \mathbf{R}$:
- a) La relación f , ¿es función?
 - b) ¿Cuál es el dominio de f ?
 - c) ¿Cuál es el conjunto imagen de f ?
 - d) Encuentre $f(1)$ y $f^{-1}(2,5)$.
 - e) Indique un intervalo de decrecimiento de la función f .
 - f) Indique el valor máximo de la función f .

Actividad N° 4

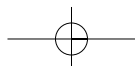
La ganancia mensual de una inmobiliaria depende de la cantidad de lotes que pueda vender durante un mes. Por mes puede vender hasta 15 lotes y sus gastos son de \$ 128000. Cada lote cuesta \$ 32000.

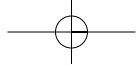
1. Una de las siguientes fórmulas permite calcular la ganancia $g(x)$ de la inmobiliaria a partir de la cantidad x de lotes vendidos. Elija la fórmula correcta.

$$g(x) = 32000 \cdot x + 128000$$

$$g(x) = 128000 - 32000 \cdot x$$

$$g(x) = 32000 \cdot x - 128000$$
2. Utilizando la fórmula que eligió en el ítem 1., defina una función g que describa la situación planteada.
3. Utilizando la función que definió en el ítem 2., calcule $g(6)$, $g(0)$ y $g^{-1}(128000)$.
4. Interprete las respuestas que dio en el ítem 3. desde el punto de vista de la situación de la inmobiliaria.
5. ¿Cuántos lotes debe vender la inmobiliaria, por lo menos, para no tener pérdidas en un mes?
6. ¿Cuál es el cero de la función g ?
7. Indique el conjunto de positividad de la función g .
8. Determine $\text{Im } g$.
9. Represente la función g en un sistema de ejes coordenados cartesianos.





Una vez que haya intentado resolver las consignas planteadas, recurra a las orientaciones que le presentamos.

¡No se haga trampas! Intente primero su propio camino y luego controle sus respuestas. Según la dificultad que se le haya presentado en cada resolución siga las indicaciones que le proponemos.

ORIENTACIONES SOBRE LAS ACTIVIDADES DE ANTICIPACIÓN

Las actividades que acaba de realizar se centran en el manejo de ecuaciones y funciones. A continuación le damos las respuestas a los ejercicios propuestos. Controle sus respuestas con las que le presentamos.

Actividad N° 1

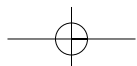
1. La ecuación que traduce el enunciado dado es $\frac{2}{5}x + 30 = x$.
2. La solución de esta ecuación es $x = 50$. Es decir que hay 50 empleados en esa fábrica.

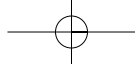
Actividad N° 2

La solución de la ecuación es $x = \frac{7}{2}$.

Actividad N° 3

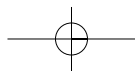
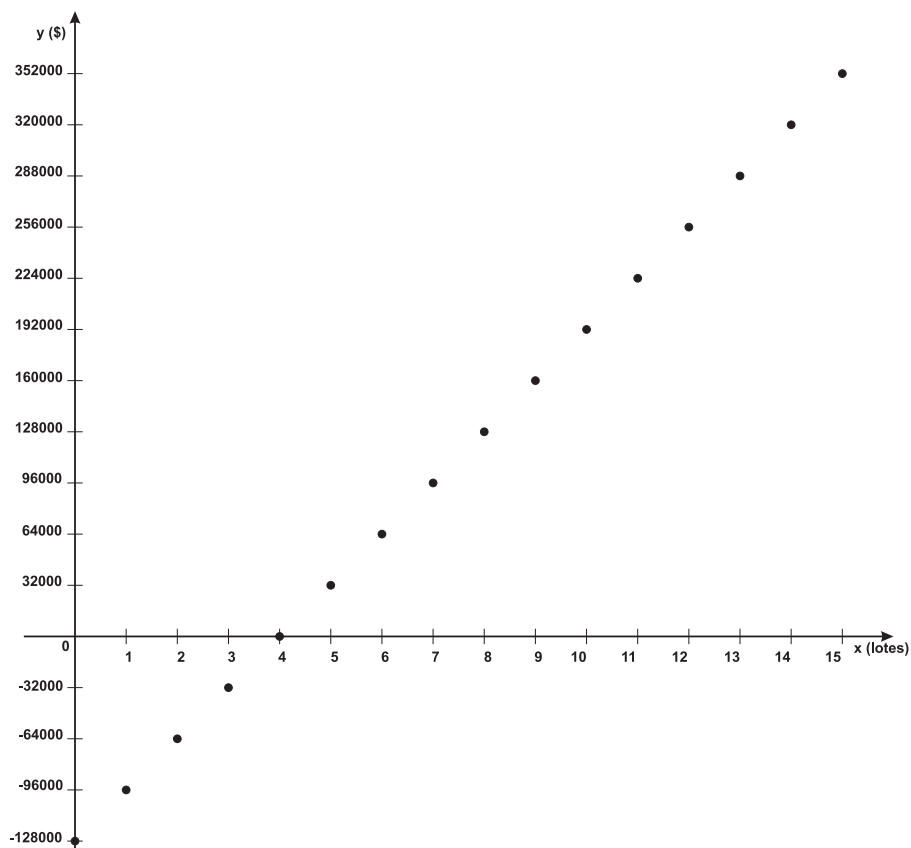
1. a) La temperatura de la sustancia en la hora $x = 1$ es de 2°C .
 b) La sustancia tiene $2,5^\circ \text{C}$ de temperatura en la hora 2.
 c) Sí, el par $(3 ; 1,5)$ pertenece al gráfico.
 d) De acuerdo con la situación que expresa el gráfico, si el par $(0 ; 1)$ pertenece al gráfico, significa que en la hora cero la sustancia tenía 1°C de temperatura.
2. a) La relación f es función porque, teniendo en cuenta la situación planteada, en cada instante la sustancia **tiene una** temperatura y ésta es **única**. También se observa en el gráfico que cada punto del dominio tiene una y sólo una imagen.
 b) $\text{Dom } f = [0 ; 3]$.
 c) $\text{Im } f = [1; 2,5]$.
 d) $f(1) = 2$ y $f^{-1}(2,5) = 2$.
 e) El intervalo de decrecimiento de la función f es $(2; 3)$.
 f) El valor máximo de la función f es $2,5$.

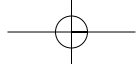




Actividad N° 4

1. La fórmula correcta es: $g(x) = 32000 \cdot x - 128000$.
2. La función es
 $g: \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = 32000 \cdot x - 128000$
3. y 4. $g(6) = 64000$ significa que si la inmobiliaria vende 6 lotes mensuales gana \$ 64000;
 $g(0) = -128000$ significa que si no vende lotes durante un mes pierde \$ 128000;
 $g^{-1}(128000) = 8$ significa que si ganó \$ 128000 en un mes es porque vendió 8 lotes.
5. La inmobiliaria debe vender por lo menos 4 lotes por mes para no tener pérdidas. (Con 4 lotes, la ganancia es cero).
6. El cero de la función g es $x = 4$.
7. El conjunto de positividad de la función g es $\{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
8. $\text{Im } g = \{-128000; -96000; -64000; -32000; 0; 32000; 64000; 96000; 128000; 160000; 192000; 224000; 256000; 288000; 320000; 352000\}$
9. La representación en \mathbb{R}^2 de la función g es:



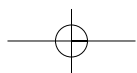


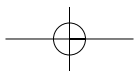
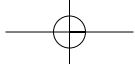
Si resolvió sin mayores dificultades las actividades propuestas y comprobó que sus respuestas son correctas, puede iniciar el trabajo con la Unidad 1 de **Matemática C**.

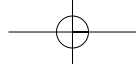
Si en cambio no logró resolver satisfactoriamente alguna de las actividades anteriores, es conveniente que revise los temas correspondientes en **Matemática A** y **B**. Para ello, utilice las indicaciones que le damos a continuación:

- Si tuvo dificultades para resolver las **Actividades N° 1 y N° 2**, trabaje con el planteo y la resolución de ecuaciones en la **Unidad 3** de la Guía de Estudio de **Matemática A**.
- Si tuvo dificultades para responder lo pedido en las **Actividades N° 3 y N° 4**, trabaje el tema de relaciones y funciones en la **Unidad 4** de la Guía de Estudio de **Matemática A** y en la **Unidad 1** de la Guía de Estudio de **Matemática B**.

Puede solicitar las Guías de Estudio de Matemática A y Matemática B en las bibliotecas de Adultos 2000.







Programa de la materia

MATEMÁTICA

Le presentamos el programa correspondiente a **Matemática C**. El conjunto de contenidos está distribuido en seis unidades con la siguiente secuencia:

UNIDAD 1: CONCEPTO DE NÚMERO REAL

- Concepto de número real.
- Densidad y completitud del conjunto de los números reales.
- Operaciones con radicales.
- Subconjuntos del conjunto de los números reales.
- Módulo o valor absoluto de un número real.

UNIDAD 2: FUNCIONES

- Clasificación de funciones.
- Composición de funciones.
- Función inversa.
- Análisis de funciones definidas en el conjunto de los números reales.

UNIDAD 3: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

- Función exponencial.
- Función logarítmica.

UNIDAD 4: TRIGONOMETRÍA

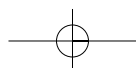
- Razones trigonométricas.
- Resolución de triángulos rectángulos utilizando razones trigonométricas.
- Función seno.
- Función coseno.
- Resolución de triángulos oblicuángulos.

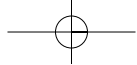
UNIDAD 5: SUCESIONES

- Noción de sucesión.
- Sucesión aritmética.
- Sucesión geométrica.

UNIDAD 6: PROBABILIDAD

- Cálculo combinatorio.
- Tipos de sucesos.
- Cálculo de probabilidades: probabilidad simple, probabilidad de sucesos complementarios, probabilidad conjunta o compuesta, probabilidad de la unión de dos sucesos o total, probabilidad condicional.





Bibliografía

Como ya lo hemos señalado al explicar la organización de la Guía, usted deberá abordar los temas del Programa trabajando conjuntamente con la Guía de Estudio y los textos recomendados, a los que tendrá que recurrir cada vez que la Guía se lo indique. Con estos textos usted estudiará los temas que no son tratados por la Guía de Estudio.

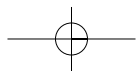
Los textos que hemos seleccionado para trabajar con esta Guía son:

- **Altman, Silvia y otros: Matemática Polimodal, Libro temático 2 (Funciones 2), Editorial Longseller.**
- **Altman, Silvia y otros: Matemática Polimodal, Libro temático 3 (Números y sucesiones), Editorial Longseller.**
- **Camuyrano, Beatriz y otros: Matemática 1 Polimodal, Editorial Estrada.**

Utilizaremos este último libro solamente en la Unidad 6. Si usted estudió **Matemática B** en Adultos 2000, ya trabajó con este libro.

Cada vez que deba trabajar algún contenido con uno de los libros, le indicaremos cuál de ellos tiene que utilizar.

Un buen manejo de la relación entre la Guía de Estudio y los textos es fundamental para el aprendizaje de los contenidos del Programa. Por eso le recomendamos estar atento a las indicaciones que le presentaremos al respecto.



Conjunto de números reales

En esta unidad ampliaremos lo visto en la Unidad 2 de **Matemática A** sobre los conjuntos numéricos y la forma de resolver operaciones dentro de ellos. Allí trabajamos con el conjunto de los números racionales y vimos la existencia de los números irracionales. Ahora presentaremos el conjunto de los números irracionales para formar, junto con los números racionales, el conjunto de los números reales.

Trabajaremos con situaciones concretas que le den sentido a la existencia de estos números y a su vez permitan visualizar en forma intuitiva los conceptos de densidad y completitud.

Propósitos de la unidad

En relación con los contenidos de esta Unidad, le proponemos que:

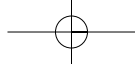
- Reconozca cómo está formado el conjunto de los números reales.
- Represente números irracionales en la recta numérica.
- Interprete los conceptos de densidad y completitud.
- Lea y exprese subconjuntos de números reales en lenguaje simbólico.
- Interprete el concepto de módulo de un número real.
- Resuelva operaciones combinadas en el conjunto de los números reales, teniendo en cuenta sus propiedades.

ACTIVIDAD N° 1: “ELABORACIÓN DE UN MEDICAMENTO”

Un importador de drogas farmacéuticas compra en el exterior 1 kg de una droga que se utiliza en la fabricación de un medicamento.

Reparte la cantidad importada en dos droguerías que a su vez distribuyen la droga en partes iguales en 10 laboratorios encargados de la elaboración del medicamento.

En cada uno de los laboratorios utilizan el total de la droga en la elaboración del medicamento. El medicamento se elabora en comprimidos. Con la cantidad adquirida, cada laboratorio obtiene 100 cajas de 50 comprimidos cada una.



Parte A

Complete el siguiente cuadro:

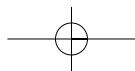
	Cantidad de droga (en kg)
Importador	
Cada droguería	
Cada laboratorio	
Cada caja del medicamento	
Cada comprimido	

Y responda las siguientes preguntas:

- ¿Sería posible seguir fraccionando la cantidad de droga?
- A un paciente su médico le receta medio comprimido diario del medicamento mencionado:
 - ¿Qué cantidad de la droga ingiere el paciente diariamente? Agregue una fila al cuadro anterior de modo que pueda agregar allí esta información.
 - A partir de la respuesta que dé a la pregunta del ítem **a)**, reflexione y revise la respuesta que usted ha elaborado para la pregunta planteada en el ítem **1**.
- A otro paciente su médico le receta un cuarto de comprimido diario del medicamento, ¿qué cantidad de la droga ingiere diariamente? Agregue una fila al cuadro anterior de modo que pueda agregar allí esta información.
- ¿Sería posible seguir fraccionando la cantidad de droga?
- Teniendo en cuenta las respuestas que dio en el cuadro y en los ítems **2** y **3**., represente en el siguiente segmento las cantidades de droga (en kg) utilizadas en cada una de las etapas descritas: importador, droguería, laboratorio, caja, comprimido, primer paciente, segundo paciente.



Si necesita revisar cómo representar números racionales en un segmento, hágalo en la Unidad 2 de Matemática A.



Parte B

En otra oportunidad, el importador distribuye el kilogramo de droga comprado en el exterior en 4 droguerías. Una de ellas, a su vez, vende su cuarto kilogramo de droga en partes iguales a 20 laboratorios encargados de elaborar otro medicamento cuya droga base es la misma que la del medicamento anterior. Cada laboratorio utiliza el total de la droga en la elaboración de 500 cajas del medicamento. Cada caja contiene 100 comprimidos.

1. Elabore un cuadro como el que completó en la **Parte A** utilizando los datos del párrafo anterior. Indique en él las cantidades de droga (en kg) utilizadas en cada una de las etapas descriptas para este nuevo medicamento.
2. Responda la siguiente pregunta:

A un paciente su médico le receta medio comprimido diario de este medicamento, ¿qué cantidad de la droga ingiere diariamente?

ORIENTACIONES

En las dos situaciones anteriores pudimos observar que siempre es posible fraccionar un "poquito" más a una cantidad dada, aunque la misma sea muy pequeña. En el caso de los comprimidos, podríamos fraccionar, a su vez, cada una de las mitades, y luego cada una de las nuevas partes obtenidas, y así ..., si nos diera la vista y la paciencia, podríamos seguir repitiendo este proceso.

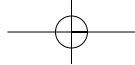
¿Hasta cuándo podríamos repetirlo? Si fuera posible podríamos repetirlo indefinidamente. Pero como sabemos que esto es imposible desde nuestras posibilidades humanas lo invitamos a resolver la Actividad N° 2 en la que una computadora se ocupará de hacer este trabajo por nosotros.

ACTIVIDAD N° 2: "INTERCALANDO NÚMEROS"

Una máquina está programada para que, al darle dos números, calcule el promedio entre esos dos números.

Pero no se detiene en ese primer paso. Sigue así: toma el primer número y el promedio obtenido en el primer paso, y calcula a continuación el promedio entre estos dos números.

Pero tampoco se detiene allí. Sigue así: toma el primer número y el promedio obtenido en el segundo paso, y calcula el promedio entre esos dos números. Y así sigue, salvo que se encuentre con algún impedimento para resolver la cuenta o que el operador le pida que se detenga.



¿Entendió cómo funciona la máquina? Si no, vuelva a leer la descripción de su funcionamiento.

Parte A

Responda las siguientes preguntas, a partir de la información anterior:

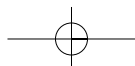
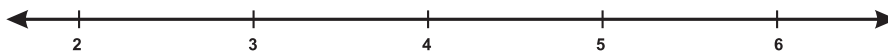
1. Si le da a la máquina los números 2 y 6, ¿qué número devuelve? Es decir, ¿cuál es el promedio entre 2 y 6?

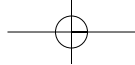
Si no recuerda cómo calcular promedios, revise cómo hacerlo en la Unidad 7 de Matemática A.

2. La máquina continúa con su tarea de calcular promedios. Como el número devuelto en el cálculo anterior es 4, ahora calcula el promedio entre 2 y 4. ¿Cuál es el resultado obtenido?
3. Complete el cuadro que le damos a continuación. Tenga en cuenta que la máquina sólo abandonará su tarea "promediadora" si no puede hacer la cuenta o si usted le indica que se detenga.

Primer número	Segundo número	Promedio
2	6	4
2	4	3
2		
2		
2		
.....
.....	Agregue Ud. 12 filas más
2		
2		

4. ¿Hay algún motivo vinculado con la cuenta para que la máquina se detenga?
5. ¿Cuántas filas podría tener la tabla anterior?
6. Represente los promedios que va obteniendo la máquina en la siguiente recta numérica:





ORIENTACIONES

A partir del trabajo realizado por la "máquina promediadora", acabamos de observar que siempre es posible encontrar el promedio entre dos números racionales distintos, y que ese promedio siempre es un número racional. Es decir, un número que puede expresarse como cociente entre dos números enteros.

Al representar los promedios obtenidos en la recta numérica, podemos ver que cada promedio queda ubicado entre los dos números dados. Y este proceso puede seguir, y seguir, y seguir Es decir, siempre es posible encontrar entre dos números racionales distintos, otro número racional.



EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: DENSIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES (\mathbb{Q})

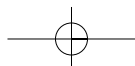
Pudimos observar que:

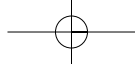
- Entre dos números racionales dados existen infinitos números racionales. Esta es una propiedad del conjunto de los números racionales (\mathbb{Q}). Por esto decimos que el conjunto \mathbb{Q} es un conjunto denso.
- A cada número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica.

Parte B

Responda la siguiente pregunta:

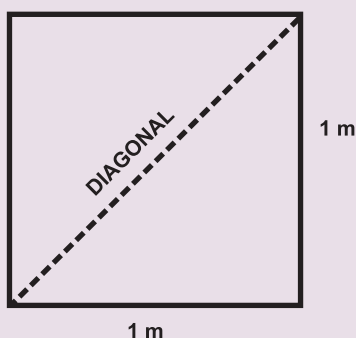
¿Con los números racionales se cubren todos los puntos de la recta? Es decir, así como a cada número racional le corresponde un punto sobre la recta, ¿a cada punto de la recta le corresponde un número racional? Dé su respuesta sólo a partir de su intuición. No importa si la misma es correcta o no, ya tendrá oportunidad de verificarlo más adelante.





ACTIVIDAD N° 3: “LOS CANTEROS DEL PARQUE”

Juan, el jardinero del parque, está armando los canteros para plantar flores ni bien empiece la primavera. Los hace de diferentes formas y tamaños. Por ejemplo, forma en la tierra un cuadrado de 1 m de lado y lo divide en dos por una de sus diagonales. Obtiene así dos canteros triangulares iguales que piensa sembrar con flores de la misma especie pero de diferente color.



Como tiene que cercar cada cantero, le hace falta calcular con exactitud la cantidad de alambre que necesita encargarse.

“Cada lado del cuadrado mide 1 m, pero la diagonal, ¿cuánto mide?”, se pregunta Juan. Como no tiene a mano una cinta métrica para medir la diagonal directamente, toma lápiz y papel, y comienza a calcularla.

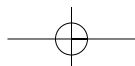
Parte A

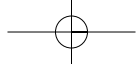
Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tipo de triángulos son los que usará Juan como canteros?
2. ¿Cómo podría hacer Juan para calcular la medida de la diagonal utilizando lápiz y papel?
3. Juan escribe la ecuación $D^2 = 1^2 + 1^2$ en sus papeles, en la que con la letra **D** expresa a la medida de la diagonal en metros. ¿Es correcta la ecuación escrita por Juan? ¿Por qué?
4. ¿Cuánto mide la diagonal?

ORIENTACIONES

Como los triángulos determinados por Juan son triángulos rectángulos, se puede calcular la medida de la diagonal del cuadrado utilizando el teorema de Pitágoras.





Si no lo recuerda, revise lo hecho en la Unidad 5 de Matemática A en relación con este teorema.

Al resolver la ecuación anterior, nos queda $D^2 = 2$, de donde $D = \sqrt{2}$ (ya que $(\sqrt{2})^2 = 2$) ó $D = -\sqrt{2}$ (ya que $(-\sqrt{2})^2 = 2$). Para la situación del cálculo de la medida de la diagonal, sólo tiene sentido la solución $D = \sqrt{2}$.

Si busca este valor en la calculadora, según la cantidad de dígitos con los que cuente la suya, el visor le mostrará un número que es aproximadamente 1,414213562.

Si eleva este número al cuadrado para verificar la ecuación resuelta, podrá observar que la calculadora le da el resultado 1,999999999.

Es decir, que el cuadrado de 1,414213562 no es exactamente 2. Por lo tanto, el valor 1,414213562 tampoco es exactamente $\sqrt{2}$. Es solamente un valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Si la calculadora contara con más dígitos, podríamos encontrar un valor que aproxime mejor que el anterior a $\sqrt{2}$ pero que tampoco correspondería en forma exacta a su valor. Y aunque pudiéramos hacerlo con una computadora que nos permita calcularlo con una cantidad muy grande de dígitos, el resultado que obtendríamos seguiría siendo un valor aproximado del número $\sqrt{2}$.

Esto ocurre porque el número $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

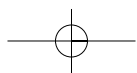
El número $\sqrt{2}$, entonces, no puede pertenecer al conjunto de los números racionales, en el que todos los números tienen expresiones decimales finitas o en el caso en que son infinitas, resultan ser cifras periódicas.

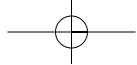
Si lo necesita, puede rever el tema de las expresiones decimales de los números racionales en la Unidad 2 de Matemática A.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: CONJUNTO DE NÚMEROS IRRACIONALES

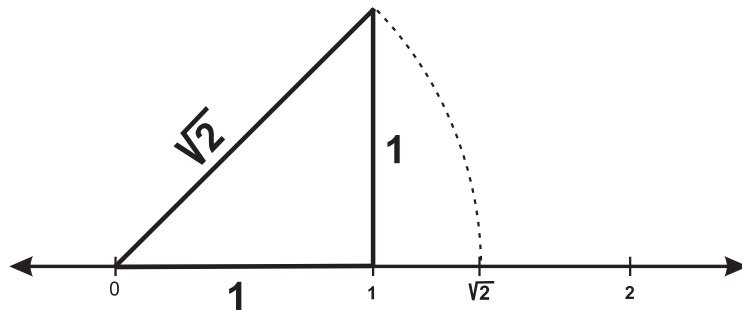
Ante la aparición de números como el anterior, los matemáticos se vieron en la necesidad de ampliar su campo numérico para poder incluirlos. Se formó entonces un nuevo conjunto, el **conjunto de los números irracionales**, que se simboliza con la letra **I**.

A este conjunto pertenecen todos los números cuya expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas. Ninguno de ellos puede expresarse como cociente de números enteros como ocurre con los números racionales. Algunos otros números irracionales son, por ejemplo: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$, π .





Podemos representar a todos los números irracionales en la recta numérica. Por ejemplo, para representar a $\sqrt{2}$ construimos sobre la recta numérica un triángulo rectángulo como el del cantero. Es decir, un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 unidad y, por lo tanto, su hipotenusa mida $\sqrt{2}$ unidades. Lo dicho se muestra en el siguiente dibujo:



Si tomamos la medida de la hipotenusa con un compás y luego trasladamos esa medida sobre la recta haciendo centro con el compás en el cero, se obtiene el punto de la recta que corresponde a $\sqrt{2}$.

Con procedimientos similares al anterior podemos representar en la recta otros números irracionales que resulten raíces cuadradas de números enteros positivos.

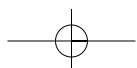
Con esto podemos dar respuesta a la pregunta planteada en la **Parte B** de la **Actividad N° 2**: si existen números que no son racionales que ocupan un lugar sobre la recta, entonces los números racionales **no** ocupan toda la recta. Es decir, a cada punto de la recta no le corresponde un número racional (por ejemplo, hay un punto sobre la recta que corresponde al número $\sqrt{2}$ que no es racional). La recta no queda completa con los números racionales.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Si agregamos al conjunto de los números racionales (**Q**) este nuevo conjunto (**I**) formamos el conjunto de los números reales, que simbolizamos con la letra **R**. La operación que permite "juntar" los elementos de dos conjuntos se llama unión y se simboliza con \cup . Por lo tanto, lo dicho anteriormente sobre el conjunto de los números reales, se simboliza:

$$\mathbf{Q \cup I = R}$$

Recién ahora, con los números reales, podemos asegurar que la recta numérica queda **completa**. A cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto sobre la recta le corresponde un número real.



Parte B

Responda las siguientes consignas:

1. Entre dos números irracionales, ¿habrá algún otro número?
2. Encuentre, si es posible, un número racional entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.
3. Encuentre, si es posible, un número irracional entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.
4. ¿Cuántos números racionales e irracionales podría encontrar entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?

ORIENTACIONES

Entre $\sqrt{2} \cong 1,4142$ (el símbolo " \cong " se lee "aproximadamente") y $\sqrt{3} \cong 1,73205$ es posible encontrar infinitos números racionales e irracionales. Por ejemplo, 1,5 ó 1,53478923

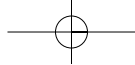
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: DENSIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES (R)

El conjunto de los números reales (**R**) es un **conjunto denso** ya que entre dos números reales cualesquiera siempre es posible encontrar otro número real.

Parte C

1. Represente sobre la recta numérica:
 - a) Todos los números reales mayores que -3 y menores que 5.
 - b) Todos los números reales mayores o iguales que -3 y menores o iguales que 5.
 - c) Todos los números reales mayores o iguales que -3 y menores que 5.
 - d) Todos los números reales mayores que 7.
 - e) Todos los números reales menores o iguales que -3.
 - f) Todos los números reales distintos de cero.
2. Escriba en forma simbólica cada uno de los conjuntos que representó en el ítem 1.

En esta Parte C estamos retomando lo que trabajamos en los ejercicios de integración de las Unidades 2 y 3 de Matemática A sobre el tema "Intervalos". Si tiene dificultades para trabajar con ellos, revea dichos ejercicios.



Parte D

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la distancia entre los números 0 y 4?
2. ¿Cuál es la distancia entre los números 0 y -4?
3. ¿Cuál es la distancia entre los números 0 y 8,32?
4. ¿Cuál es la distancia entre los números 0 y -8,32?
5. ¿Cuál es la distancia entre los números 0 y 0?
6. ¿Cuál es la distancia entre los números 0 y a , siendo a un número real cualquiera?
7. Si un compañero le dice que la distancia entre los números 0 y a es igual al número a , ¿usted que le contesta?
8. ¿Hay algún número real para el cual no es posible calcular su distancia al 0? Si su respuesta es afirmativa, indique cuál es ese número. Si su respuesta es negativa, explique con sus palabras el por qué de su decisión.

ORIENTACIONES

Es posible calcular la distancia a cero desde cualquier punto de la recta numérica. Como cualquier punto de la recta numérica representa a un número real, es posible calcular la distancia entre 0 y cualquier número real a .

Por ejemplo, la distancia entre 0 y 4 vale 4, y es la misma que entre 0 y -4; la distancia entre 0 y 8,32 vale 8,32 y es la misma que la distancia entre 0 y -8,32.

En general, la distancia entre un número real a cualquiera y 0 es la misma que la distancia entre 0 y $-a$, siendo $-a$ el número real opuesto de a .

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: MÓDULO DE UN NÚMERO REAL

Llamamos **módulo** de un número real a a la distancia entre a y el cero en la recta numérica. Lo simbolizamos $|a|$.

Parte E

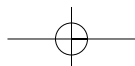
Responda las siguientes consignas teniendo en cuenta lo dicho en las Orientaciones y en el apartado En términos matemáticos:

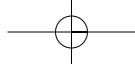
1. Calcule $|1,25|$; $|-5|$; $|0|$; $|\sqrt{2}|$.
2. Determine, si es posible, el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

$$|x| = 8$$

$$|x| = 0$$

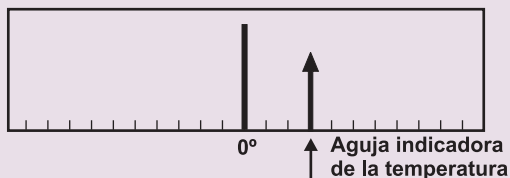
$$|x| = -2$$





ACTIVIDAD N° 4: “PARA CUIDAR UN EQUIPO”

En una fábrica utilizan un equipo que puede dañarse si su temperatura oscila en más de 5° C alrededor de 0° C. El operario encargado de controlar su funcionamiento, lee la temperatura en un dispositivo como el que sigue:



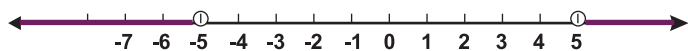
Parte A

1. Indique sobre la recta numérica todas las posiciones que puede tomar la aguja en el dispositivo sin que signifique un riesgo para el funcionamiento del equipo.
2. Exprese en forma simbólica, utilizando intervalos, el conjunto que determinó en el ítem 1.
3. Represente sobre la recta numérica todas las temperaturas que podrían provocar daños en el equipo.

ORIENTACIONES

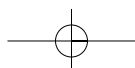
El equipo no se dañará si su temperatura oscila entre -5° C y 5° C, es decir si la temperatura toma valores pertenecientes al intervalo $[-5 ; 5]$. Desde cualquier posición x perteneciente a este intervalo la distancia a 0 es menor o igual que 5. Podemos escribir entonces, que todas las posiciones x que puede tomar la aguja sin que se dañe el equipo son aquellas que verifican la inecuación $|x| \leq 5$.

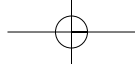
Si la temperatura del equipo es superior a 5° C ó inferior a -5° C el equipo puede dañarse. Si representamos sobre la recta numérica todos estos valores, nos queda:



Aunque dentro de la situación concreta no tiene sentido pensar en temperaturas infinitamente bajas o altas, podemos escribir simbólicamente al conjunto representado en el gráfico anterior como: $(-\infty ; -5) \cup (5 ; +\infty)$.

Desde cualquiera de estas posiciones x la distancia a cero es mayor que 5. Simbólicamente podemos expresarlo así: $|x| > 5$. Es decir, la unión de intervalos anterior es el conjunto solución de la inecuación $|x| > 5$.





Parte B

Encuentre el conjunto solución de cada una de las inecuaciones dadas a continuación. En cada caso represente el conjunto solución en la recta numérica y escríbalo utilizando intervalos.

1. $|x| < \frac{1}{2}$

2. $|x| > 3$

3. $|x| \geq \sqrt{2}$

4. $|x| \leq -2$

5. $|x| \leq 8$

En la próxima actividad le proponemos que trabaje con el libro. Antes de que comience a realizar este trabajo queremos hacerle algunas sugerencias que consideramos lo ayudarán en esta tarea:

- *No es conveniente que se extienda en la lectura más allá de lo indicado.*
- *Resuelva sólo aquellas actividades que le indiquemos. Si intenta trabajar con actividades no indicadas podría encontrarse con situaciones que todavía no está en condiciones de resolver o con dificultades mayores que las requeridas.*
- *Antes de comenzar el trabajo con el libro, le sugerimos que señale de algún modo que a usted le resulte cómodo, aquello que le indicamos para leer y resolver. Esto le permitirá restringir su trabajo en forma anticipada.*

Tenga en cuenta estas sugerencias cada vez que le proponemos que trabaje con el libro.

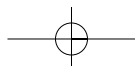
ACTIVIDAD N° 5: “TRABAJANDO CON EL LIBRO”

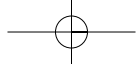


En esta actividad lo orientaremos para que trabaje el resto de los contenidos de esta unidad utilizando el libro temático 3: *Números y sucesiones de Altman, S. y otros, editorial Longseller.*

El abordaje de estos temas se realizará únicamente en base a la lectura y la resolución de las actividades que le indicaremos en los siguientes párrafos.

¿Listo para comenzar su trabajo con el libro? Le indicaremos paso a paso el camino que debe seguir con él.



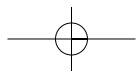


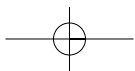
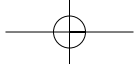
En el capítulo 2: Operaciones con números reales:

1. Lea la presentación del capítulo en la página 33.
2. Resuelva los problemas 1 y 2 propuestos en la página 34.
3. Lea la resolución del problema 1 y las definiciones y propiedades dadas desde la página 34 hasta la página 38.
4. Lea desde la página 38 hasta la página 41: Suma y resta de radicales, Extracción fuera del signo radical, Producto de radicales y Racionalización de denominadores.
5. Resuelva el ejercicio 11 propuesto en el recuadro de la derecha de la página 39.
6. Lea la resolución del problema 2 en la página 41.
7. Lea división de radicales en las páginas 41 y 42.
8. Resuelva los ítems a), b) y c) del ejercicio 16 propuesto en el recuadro de la derecha de la página 42.
9. Resuelva los ejercicios 1, 4, 5, 6, 7, 8 a), b) y g), 9 a) y 10 de la Guía de ejercitación propuesta en las páginas 43 a 47.

Antes de comenzar a estudiar la próxima unidad, usted debe realizar los ejercicios de integración correspondientes a la Unidad 1. Su realización es imprescindible. Al resolverlos trabajará aspectos vinculados con los contenidos de la unidad que no fueron trabajados en las actividades que resolvió hasta este momento. También podrá integrar los distintos contenidos de la unidad y autoevaluar si ya se encuentra en condiciones de pasar a estudiar la próxima unidad.

¡No deje de realizarlos!





En esta unidad retomaremos el trabajo iniciado en **Matemática A** y **B** en cuanto a las funciones como modelos para describir y analizar situaciones de la realidad.

En relación al concepto de función, incorporaremos nuevos elementos que utilizaremos para analizar funciones definidas en el conjunto de los números reales y que nos permitirán presentar otros tipos de funciones en las próximas unidades.

Propósitos de la unidad

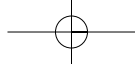
En relación con los contenidos de esta unidad, le proponemos que:

- Reconozca y utilice la simbología matemática asociada al concepto de función.
- Clasifique funciones.
- Identifique bajo qué condiciones es posible componer funciones y determine la función que resulta de la composición.
- Identifique bajo qué condiciones la relación inversa de una función es función y determine la función inversa de diferentes funciones.
- Determine el dominio natural de una fórmula.
- Analice la positividad y negatividad de una función utilizando el teorema de Bolzano y su consecuencia.
- Identifique las condiciones que deben verificarse para que una función sea creciente o decreciente en un intervalo.
- Identifique las condiciones que deben verificarse para que una función alcance un máximo o un mínimo en un punto.
- Describa y analice situaciones de la realidad modeladas a través de una función, utilizando todos los elementos que se trabajan en la unidad.

ACTIVIDAD N° 1: “OPTIMIZACIÓN DEL PROCESO DE ELABORACIÓN DE UNA SUSTANCIA”

En la planta industrial K - S. A se utilizan varios tanques para realizar las diferentes etapas del proceso de elaboración de una sustancia.

El jefe de la planta quiere optimizar este proceso. Para eso decide realizar un análisis exhaustivo de lo que ocurre con cada uno de los tanques que intervienen en las diferentes etapas del proceso de elaboración.



Al observar durante 3 horas lo ocurrido en la primera etapa de elaboración de la sustancia, vio que en el tanque utilizado (al que llamaremos tanque 1) entraba la misma cantidad de hectolitros por hora. Para continuar su análisis una vez finalizado el proceso, construyó la siguiente tabla en la que consignó las cantidades de hectolitros de sustancia que contuvo ese tanque en **algunos** instantes del período de observación. Daremos el nombre de “hora cero” ($t = 0$) a la hora en que se inició la observación.

t (en horas)	0	1	2	3
c (en hl)	2	2,5	3	3,5

Parte A

A partir de la tabla anterior, responda las preguntas que siguen. Hágalo como si estuviera conversando con el jefe de la planta.

1. ¿En qué período de tiempo el jefe observó lo ocurrido con el contenido del tanque?
2. ¿Qué cantidad de hectolitros tenía el tanque al iniciarse la observación? ¿Y después de 1 hora de observación?
3. ¿Después de cuántas horas de observación el tanque tuvo 3 hl de sustancia?

Al resolver la parte B podría encontrarse con términos o simbología que no recuerda o no conoce. En ese caso deberá trabajar estos temas antes de continuar con el trabajo de la unidad. Al finalizar el enunciado de la Parte B le damos las indicaciones que lo orientarán para hacerlo con las Guías correspondientes a Matemática A y B.

Parte B

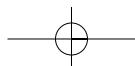
Llamaremos c a la función que expresa la cantidad de hectolitros de sustancia que tiene el tanque 1 en cada instante del período de observación.

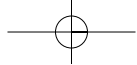
1. ¿Cuál es el dominio de la función c ?
2. ¿A qué es igual $c(0)$? ¿Y $c(1)$?
3. ¿Existe $c^{-1}(3)$? En caso afirmativo, indique su valor.
4. Escriba algunos de los pares ordenados que pertenecen a esta función. ¿Puede escribirlos a todos? ¿Por qué?
5. Represente gráficamente la función c en un sistema coordenado cartesiano.
6. Elija entre las siguientes fórmulas la que expresa la cantidad de hectolitros que tiene el tanque en cada instante del período de observación:

$$\bullet \quad c(t) = 0,5 \cdot t$$

$$c(t) = 2 \cdot t + 0,5$$

$$c(t) = 0,5 \cdot t + 2$$





7. Escriba la función c en forma simbólica.
8. ¿Cuál es el conjunto imagen de la función c ?

Si los términos y la simbología que aparecen en las preguntas anteriores le impiden dar respuesta a las mismas le sugerimos que trabaje este tema resolviendo las actividades propuestas en la Unidad N° 4 de Matemática A y en la Unidad N° 1 de Matemática B.

ORIENTACIONES

Si comparamos las respuestas a las preguntas **1, 2 y 3** de la **Parte A** con las de estos mismos ítems en la **Parte B** veremos que están estrechamente vinculadas. Por ejemplo:

- La respuesta a la **pregunta 1. de la Parte A** es: el **período de observación** del contenido del tanque es desde la hora 0 a la hora 3.
- La respuesta a la **pregunta 1. de la Parte B** es: el **dominio** de c es $[0 ; 3]$. Simbólicamente escribimos $\text{Dom } c = [0 ; 3]$.

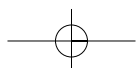
Observe que en la Parte A las preguntas están planteadas en términos de la situación que estamos analizando, mientras que en la Parte B las preguntas están planteadas usando términos y simbología matemática.

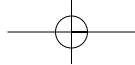
Seguramente a usted le haya resultado más sencillo expresarse en términos de la situación porque utiliza un lenguaje que le es familiar. Pero, también es necesario que pueda entender y expresarse en el lenguaje que utiliza la Matemática. Quizá usted sienta que es un lenguaje demasiado complejo para aprenderlo pero, no se preocupe, asociándolo con situaciones ya conocidas usted podrá ir incorporándolo poco a poco.

Para poder incorporar el lenguaje matemático, del mismo modo que cuando se dispone a aprender cualquier otro lenguaje, usted deberá usarlo. A partir de ello, podrá reflexionar sobre cómo y para qué lo usa, qué palabras y símbolos nuevos va aprendiendo, podrá asociarlo a situaciones concretas que le resulten familiares, darle nombres a los conceptos y escribirlos con su expresión simbólica.

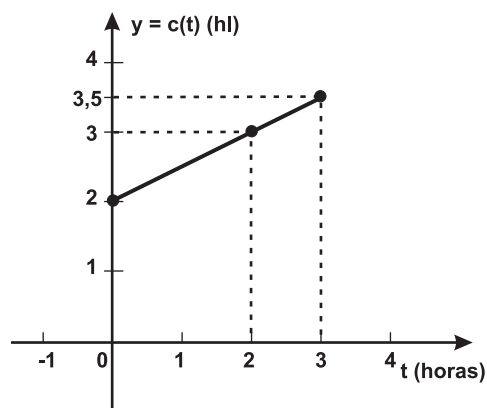
Este trabajo le permitirá familiarizarse progresivamente con los conceptos y el lenguaje asociado con ellos.

- Las expresiones simbólicas $c(0)$ y $c(1)$ expresan, respectivamente, a la imagen de 0 y de 1 a través de la función c (es decir, la cantidad de hectolitros registrada a la hora 0 y a la hora 1): $c(0) = 2$ y $c(1) = 2,5$.
- $c^{-1}(3)$ es la forma simbólica de expresar a la preimagen o imagen inversa de 3 a través de c (es decir, la hora en la que el tanque contuvo 3 hl): $c^{-1}(3) = 2$.





- De acuerdo con la tabla, algunos pares ordenados que pertenecen a la función c son $(0 ; 2)$, $(1 ; 2,5)$, $(2 ; 3)$, $(3 ; 3,5)$. No podríamos escribirlos a todos porque son infinitos debido a que la función c expresa lo ocurrido en **cualquier instante** del período de observación.
- La representación gráfica de la función c es:



- La expresión simbólica de la función que expresa lo observado en el tanque en esta primera etapa es:
 $c: [0 ; 3] \rightarrow \mathbf{R} / c(t) = 0,5 \cdot t + 2$ que se lee “ c de $[0 ; 3]$ en \mathbf{R} tal que $c(t) = 0,5 \cdot t + 2$ ”.

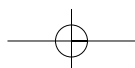
En la expresión anterior, el intervalo $[0 ; 3]$ es el dominio de la función; \mathbf{R} (conjunto de los números reales) es el conjunto de llegada y $c(t)$ es la fórmula que vincula a los elementos del dominio con los elementos del conjunto de llegada.

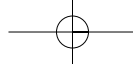
Para que la función c exprese la cantidad de hl que tiene el tanque en **cualquier instante** t del período de tiempo entre la hora 0 y la hora 3, el dominio de la función debe ser $[0 ; 3]$ es decir, el conjunto formado por todos los números reales que están entre 0 y 3. La tabla sólo nos muestra lo que ocurre en algunos instantes de este período.

Si la notación de intervalos no le resulta familiar retome lo trabajado sobre este tema en la Unidad 2 de Matemática A.

El conjunto de llegada de la función c es el conjunto \mathbf{R} , pero sólo resultan ser imagen de algún elemento del dominio los números reales que están entre 2 y 3,5; es decir, el intervalo $[2 ; 3,5]$. Este es el conjunto imagen de la función c .

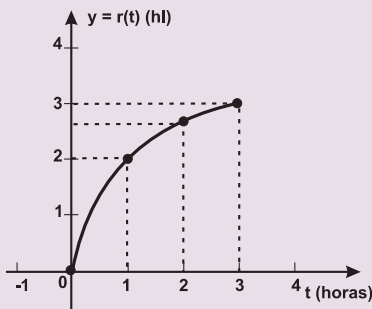
En símbolos: $\mathbf{Im} c = [2 ; 3,5]$.



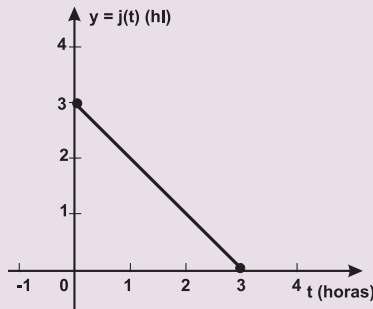


Parte C

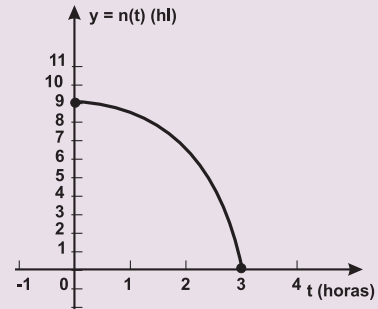
El jefe de la planta continuó con su análisis observando el resto de los tanques utilizados en las otras etapas de elaboración de la sustancia. En cada caso representó gráficamente lo observado en cada tanque durante un período de 3 horas. Los gráficos realizados por el jefe son los que le damos a continuación. Cada uno de ellos expresa la función que describe la cantidad de hectolitros de sustancia que contiene el tanque en cada instante del período analizado.



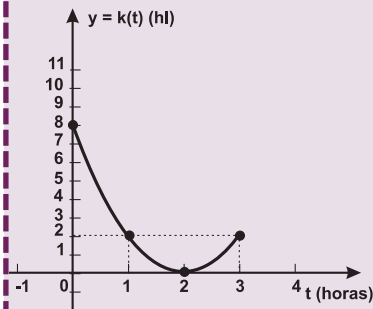
TANQUE 2



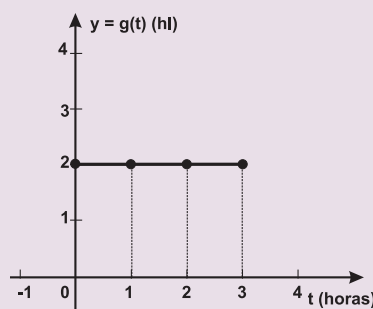
TANQUE 3



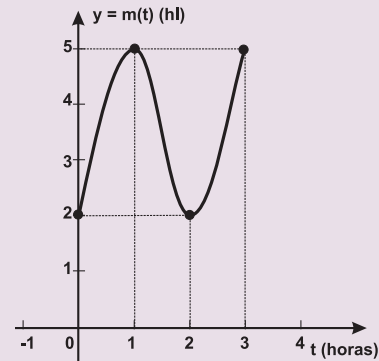
TANQUE 4



TANQUE 5



TANQUE 6

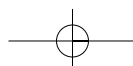


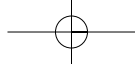
TANQUE 7

Responda la siguiente consigna a partir de la observación de las representaciones gráficas de los contenidos de los tanques:

Complete las notaciones simbólicas que le planteamos a continuación de modo que en cada función el conjunto de llegada coincida con el conjunto imagen de la misma. A modo de ejemplo le mostramos las expresiones simbólicas de las funciones c y g .

- $c: [0 ; 3] \rightarrow [2 ; 3,5] / y = c(t)$ TANQUE 1
- $r: [0 ; 3] \rightarrow \dots\dots\dots / y = r(t)$ TANQUE 2
- $j: [0 ; 3] \rightarrow \dots\dots\dots / y = j(t)$ TANQUE 3
- $n: [0 ; 3] \rightarrow \dots\dots\dots / y = n(t)$ TANQUE 4
- $k: [0 ; 3] \rightarrow \dots\dots\dots / y = k(t)$ TANQUE 5
- $g: [0 ; 3] \rightarrow \{2\} / y = g(t)$ TANQUE 6
- $m: [0 ; 3] \rightarrow \dots\dots\dots / y = m(t)$ TANQUE 7





ORIENTACIONES

Teniendo en cuenta que la consigna indica que el conjunto de llegada debe ser el conjunto imagen de cada una de las funciones, por ejemplo, para el tanque 5, resulta:

$$\mathbf{k} : [0 ; 3] \rightarrow [0 ; 8] / \mathbf{y} = \mathbf{k}(t)$$

Si no tuviéramos que cumplir con este requisito podríamos haber definido otra función que represente lo que ocurre en el tanque 5, por ejemplo:

$$\mathbf{z} : [0 ; 3] \rightarrow [0 ; 10] / \mathbf{y} = \mathbf{z}(t)$$

En esta función el conjunto de llegada es un conjunto diferente del conjunto imagen de la función. Si bien intuitivamente la función \mathbf{z} es menos representativa de la situación que modela, matemáticamente es posible definir ésta y otras infinitas funciones que representen a la situación. Para hacerlo debemos cuidar que el conjunto de partida y la forma de relacionar los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada sean los mismos, y que el conjunto de llegada contenga a los elementos del conjunto imagen. Es decir, en este caso, el conjunto de llegada debe contener al conjunto $[0 ; 8]$.

También describiría lo que ocurre en el tanque 5 la siguiente función:

$$\mathbf{b} : [0 ; 3] \rightarrow \mathbf{R} / \mathbf{y} = \mathbf{b}(t)$$

En las funciones \mathbf{z} y \mathbf{b} , el conjunto de llegada tiene otros elementos además de los del conjunto imagen, ya que, por ejemplo, ambas tienen al 9 en el conjunto de llegada y 9 no es imagen de ningún elemento del dominio.

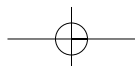
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FUNCIÓN SURYECTIVA O SOBRYECTIVA

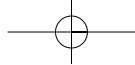
En todas las funciones que definió en la **Parte C** de esta actividad, el conjunto de llegada es igual al conjunto imagen. Es decir, todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de algún elemento del conjunto de partida. Podemos decir también que no hay elementos en el conjunto de llegada que no sean imagen de algún elemento del conjunto de partida.

Las funciones que tienen esta característica se llaman **funciones suryectivas o sobryectivas**.

Parte D

1. Observe ahora solamente el gráfico de la función \mathbf{r} que describe lo que ocurre con el tanque 2, y responda las siguientes preguntas:





- a) Este tanque, ¿tiene en dos momentos distintos del período de observación la misma cantidad de sustancia? Si su respuesta es afirmativa, indique un par de momentos en los que ocurra esto.
- b) ¿Algún elemento del conjunto imagen de r tiene más de una preimagen? Si su respuesta es afirmativa, indique un elemento que lo verifique.
2. Observe ahora solamente el gráfico de la función k que describe lo ocurrido con el **tanque 5**, y responda las siguientes preguntas:
- a) Este tanque, ¿tiene en dos momentos distintos del período de observación la misma cantidad de sustancia? Si su respuesta es afirmativa, indique un par de momentos en los que ocurra esto.
- b) ¿Algún elemento del conjunto imagen de k tiene más de una preimagen? Si su respuesta es afirmativa, indique un elemento que lo verifique.

ORIENTACIONES

En el **tanque 2** no se registran durante el período de observación dos momentos distintos en los que el tanque tenga la misma cantidad de sustancia.

En el **tanque 5** no ocurre lo mismo. Por ejemplo, tanto a la hora 1 como a la hora 3, el tanque tiene 2 hl de sustancia.

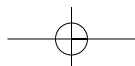
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FUNCIÓN INYECTIVA Y FUNCIÓN BIYECTIVA

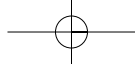
Observe que para la función r , cualquiera sea el elemento del conjunto imagen, éste tiene una única preimagen. O lo que es lo mismo, dos elementos distintos del dominio no tienen la misma imagen.

Llamaremos **funciones inyectivas** a las funciones que tienen esta característica.

En cambio, la función k tiene elementos del conjunto imagen (por ejemplo, el 2) con más de una preimagen. O también podemos decir que dos elementos distintos del dominio de k tienen la misma imagen. Por lo tanto, la función k **no es inyectiva**.

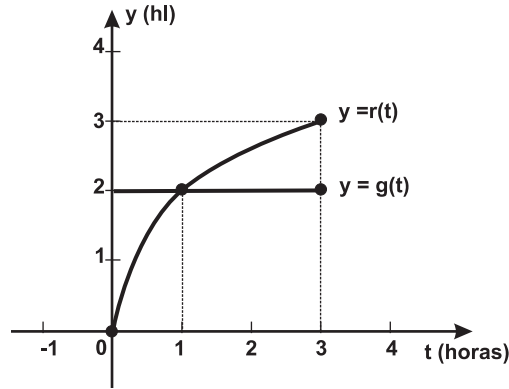
Llamaremos **funciones biyectivas** a aquellas funciones que son inyectivas y suryectivas (o sobreyectivas).





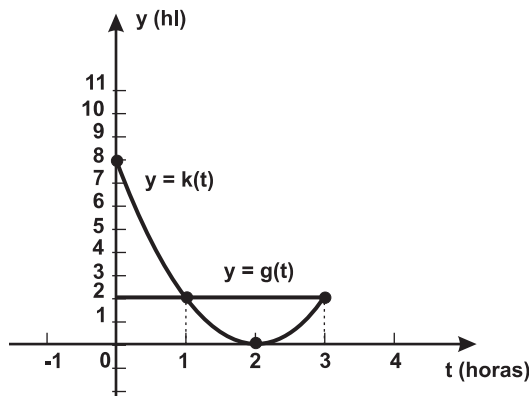
Parte E

1. En el siguiente gráfico se han superpuesto los gráficos correspondientes al **tanque 2** y al **tanque 6**:



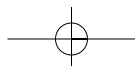
Responda las siguientes preguntas a partir de la observación del gráfico:

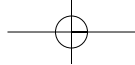
- a) ¿Tienen puntos en común ambos gráficos? Si su respuesta es afirmativa, indique cuántos puntos en común tienen los gráficos de las funciones r y g .
 - b) De acuerdo con la situación planteada, ¿qué interpretación le daría al hecho de que los dos gráficos tengan puntos en común?
 - c) ¿Cuál es la preimagen de 2 a través de la función r ?
 - d) ¿Hay algún otro elemento del dominio de r cuya imagen sea 2?
2. En el gráfico que sigue se han superpuesto los gráficos correspondientes al **tanque 5** y al **tanque 6**:



Responda las siguientes preguntas a partir de la observación del gráfico:

- a) Los tanques 5 y 6, ¿tienen igual cantidad de sustancia en algún momento del período analizado? En caso afirmativo, indique cuándo ocurre esto.
- b) ¿Cuántos puntos en común tienen ambos gráficos?





3. A partir de lo realizado en los ítems 1. y 2. de esta parte de la actividad, intente describir un recurso que le permita decidir a partir del gráfico cuándo una función es inyectiva.

Parte F

Analice, observando los gráficos correspondientes a los tanques 1, 3, 4, 6 y 7, si las funciones **c**, **j**, **n**, **g** y **m** son biyectivas.

Parte G

1. Analice si las funciones que definimos a continuación son inyectivas. (Sugerencia: para responder construya las tablas de valores correspondientes a cada una de las funciones).

$$f: \{-1, 2, 5, 7, 9\} \rightarrow \mathbf{R} / y = f(x) = x + 1$$

$$g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R} / y = g(x) = x^2$$

$$h: \{-2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbf{R} / y = h(x) = x^3$$

$$j: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R} / y = j(x) = x^4$$

2. A partir del análisis que realizó en el ítem 1., decida si las siguientes funciones son inyectivas. Si le hace falta represente gráficamente las funciones y utilice el recurso gráfico para tomar su decisión.

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / y = f(x) = x + 1$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / y = g(x) = x^2$$

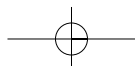
$$h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / y = h(x) = x^3$$

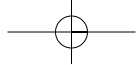
$$j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / y = j(x) = x^4$$

3. Decida si las funciones dadas en los ítems 1. y 2. son sobreyectivas. Fundamente su decisión en cada caso.
4. ¿Cuáles de las funciones anteriores son biyectivas?

ORIENTACIONES

Las funciones definidas en el ítem 1. son diferentes de las funciones definidas en el ítem 2. porque tienen conjuntos de partida diferentes. De todos modos la función **f** del ítem 1. tiene la misma fórmula que la función **f** del ítem 2. y lo mismo ocurre con las funciones **g**, **h** y **j**.





El hecho de que en el ítem **1.** el conjunto de partida sea un conjunto finito le permitió visualizar una a una las imágenes de los elementos del conjunto de partida y así pudo clasificar la función con menos dificultad. Extendiendo esta idea al ítem **2.** usted también puede dar respuesta al mismo aunque el conjunto de partida en este caso sea un conjunto formado por infinitos elementos.

En la actividad anterior le acabamos de proponer un recurso que puede resultarle de utilidad en muchas ocasiones en las que usted deba trabajar con funciones definidas en conjuntos infinitos: pensar lo pedido a partir de un conjunto finito de varios datos para que lo observado con ellos lo ayude a pensar lo que ocurrirá con el resto de los infinitos elementos del conjunto. Aunque no se lo proponamos en otras oportunidades, tenga en cuenta este recurso cada vez que le pidamos que clasifique una función.

En lo que sigue daremos respuesta a lo solicitado en la **Parte G:**

- Las funciones **f** y **h** son biyectivas.
- Las funciones **g** y **j** no lo son. En ninguno de los dos casos se verifica la inyectividad ni la sobreyectividad.
- La función **g** no es inyectiva porque hay elementos distintos del dominio que tienen la misma imagen. Por ejemplo, $g(-2) = 4$ y $g(2) = 4$.
- La función **g** no es sobreyectiva porque hay elementos del conjunto de llegada que no pertenecen al conjunto imagen. Por ejemplo -1 pertenece al conjunto de llegada pero no pertenece al conjunto imagen ya que a través de la fórmula $y = x^2$ la imagen de cualquier valor x del dominio es siempre un número positivo o cero.

Para que una función de fórmula $y = x^2$ sea biyectiva debe tener un dominio y un conjunto de llegada adecuados.

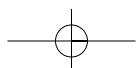
Para garantizar la inyectividad, el dominio debe ser un subconjunto de números reales en el que se verifique que dos elementos distintos no tengan la misma imagen. Ese conjunto puede ser, por ejemplo $\mathbf{R}_{\geq 0}$.

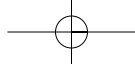
Para asegurar la sobreyectividad, el conjunto de llegada debe coincidir con el conjunto imagen, es decir $\mathbf{R}_{\geq 0}$. Por ejemplo, entonces:

$$\mathbf{k}: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} / \mathbf{k}(x) = x^2 \text{ resulta biyectiva.}$$

Parte H

1. Analice si las siguientes relaciones son funciones. En los casos que no lo sean, indique la razón que lo impide. Si dicha razón fuera que algún elemento del conjunto de partida no tiene imagen, indique cuál es ese número.





Si no recuerda qué condiciones debe cumplir una relación para ser función, revise este concepto en la Unidad 4 de Matemática A.

a) $f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = \frac{1}{x}$

$g: \{0; 1; 2; 3; 4\} \rightarrow \mathbf{R} / g(x) = \frac{1}{x}$

$h: \{1; 2; 3\} \rightarrow \mathbf{R} / h(x) = \frac{1}{x}$

b) $f: \{-4; -2; -1; 0; 1; 2; 4\} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = \sqrt{x}$

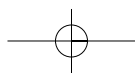
$g: \{0; 1; 2; 3; 4\} \rightarrow \mathbf{R} / g(x) = \sqrt{x}$

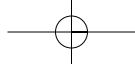
2. Escriba el dominio de cada una de las relaciones anteriores.
3. En el ítem 1. a) definimos tres relaciones distintas utilizando como fórmula la cuenta $y = \frac{1}{x}$. Como conjunto de partida usamos un conjunto finito distinto en cada caso. De acuerdo con sus respuestas a los ítems 1. y 2., responda las siguientes preguntas:
 - a) ¿Qué número del conjunto de partida queda excluido del dominio de la relación si tomamos como conjunto de partida al conjunto \mathbf{R} ? ¿Por qué?
 - b) ¿Cuál es el dominio de la relación $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = \frac{1}{x}$?
4. En el ítem 1. b) definimos dos relaciones diferentes utilizando como fórmula la cuenta $y = \sqrt{x}$, y como conjunto de partida un conjunto finito. De acuerdo con sus respuestas a los ítems 1. y 2., responda las siguientes preguntas:
 - a) ¿Qué números del conjunto de partida quedan excluidos del dominio de la relación si tomamos como conjunto de partida al conjunto \mathbf{R} ? ¿Por qué?
 - b) ¿Cuál es el dominio de la relación $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / g(x) = \sqrt{x}$?

ORIENTACIONES

El dominio de la relación f definida en el ítem 3. de la Parte H es $\mathbf{R} - \{0\}$ ya que no es posible dividir por cero. Este conjunto incluye a los dominios de todas las relaciones consideradas en el ítem 1. a) ya que todas tienen la misma fórmula que f .

El dominio de la relación g definida en el ítem 4. es $\mathbf{R}_{\geq 0}$ porque no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo en el conjunto de los números reales. Este conjunto incluye a los dominios de todas las relaciones consideradas en el ítem 1. b) ya que todas tienen la misma fórmula que g .





EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: DOMINIO NATURAL DE UNA FÓRMULA

Al conjunto $\mathbf{R} - \{0\}$ lo llamamos **dominio natural** de la fórmula $\mathbf{f(x)}$. El dominio natural de la fórmula $\mathbf{g(x)}$ es el conjunto $\mathbf{R}_{\geq 0}$.

En general, llamamos **dominio natural de una fórmula** al conjunto que incluye a todos los dominios posibles de la misma.

Parte I

Determine el dominio natural de las siguientes fórmulas:

$$y = \frac{1}{x - 2}$$

$$y = \sqrt{x - 1}$$

$$y = \frac{1}{x + 2}$$

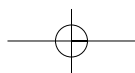
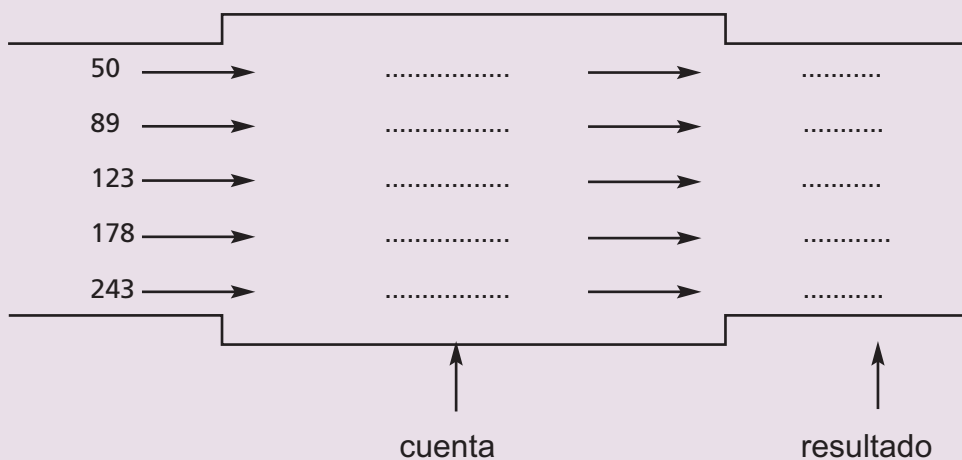
$$y = \sqrt{x + 1}$$

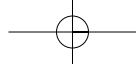
$$y = \frac{1}{(x - 2) \cdot (x + 2)}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ACTIVIDAD N° 2: “PRESUPUESTO PARA LA COMPRA DE CEMENTO”

Mauro acaba de comprar una casa. A pesar de que su presupuesto es bastante ajustado planea hacer remodelaciones a medida que vaya ahorrando unos pesitos. Para averiguar precios visita varios corralones de venta de materiales para la construcción. Al finalizar el recorrido y después de comparar todos los presupuestos, decide que empezará por comprar bolsas de cemento. El corralón con el mejor precio le cobra \$ 0,25 el kg. Él todavía no sabe qué cantidad de cemento necesitará para la obra, pero como es muy previsor quiere ir haciendo algunos cálculos. Para ello utiliza unos operadores que aprendió en el colegio:





Parte A

Responda las siguientes consignas teniendo en cuenta la información anterior:

1. En el operador que armó Mauro, el dato que ingresa representa una posible cantidad de kilogramos de cemento a comprar y el dato que sale representa el precio que pagaría si comprase esa cantidad. Le pedimos que lo complete. Es decir, escriba la cuenta que debe realizar para calcular la cantidad a pagar según la cantidad de cemento que compre, y escriba también las cantidades de dinero a pagar por comprar las cantidades indicadas.
2. a) ¿Qué operación realiza este operador con cualquier dato que ingresa?
 b) Escriba la fórmula con que el operador obtiene el dato de salida correspondiente a cada dato que ingresa.

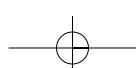
Parte B

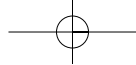
Al armar su presupuesto, Mauro también debe calcular que por entregar la compra a domicilio le cobran \$ 10 más en concepto de flete. En su cuaderno dibuja lo siguiente:

50	→	\$0,25 . 50	→	\$ 12,50	→	Más	→
89	→	\$ 0,25 . 89	→	\$ 22,25	→	\$ 10	→
123	→	\$ 0,25 . 123	→	\$ 30,75	→	por	→
178	→	\$ 0,25 . 178	→	\$ 44,50	→	flete	→
243	→	\$ 0,25 . 243	→	\$60,75	→		→
x	→	\$ 0,25 . x	→	0,25 . x	→		→

De acuerdo con la nueva información responda las siguientes consignas:

1. Complete el segundo operador que armó Mauro, de modo que cada dato de salida represente el precio que pagará por recibir la compra de cemento en su domicilio.
2. ¿Qué operación realiza el segundo operador con cada dato que ingresa?
3. Escriba la fórmula con que el segundo "operador" obtiene el dato de salida correspondiente a cada dato que ingresa.
4. Escriba la fórmula que permite calcular el precio y a pagar por entrega en domicilio de una cantidad x (en kg) de cemento.

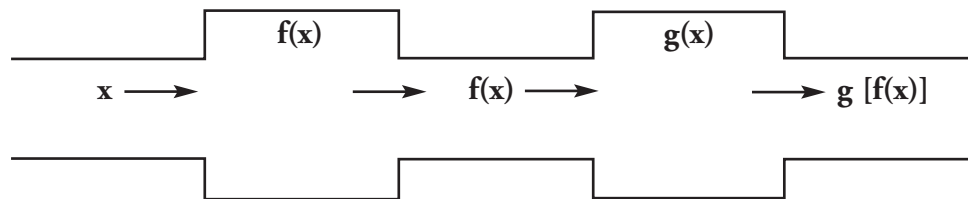




ORIENTACIONES

Llamaremos “**operador compuesto**” a una secuencia de operadores como la que utilizó Mauro para armar el presupuesto a pagar por comprar cierta cantidad de cemento y que la misma sea entregada en su domicilio. Este “**operador compuesto**” está formado por dos “**operadores elementales**” encadenados de modo que el dato que sale del primer operador ingresa al segundo para ser operado en él.

Si llamamos **f** al primero de los operadores usado por Mauro y **g** al segundo, podríamos representar al “**operador compuesto**” así:



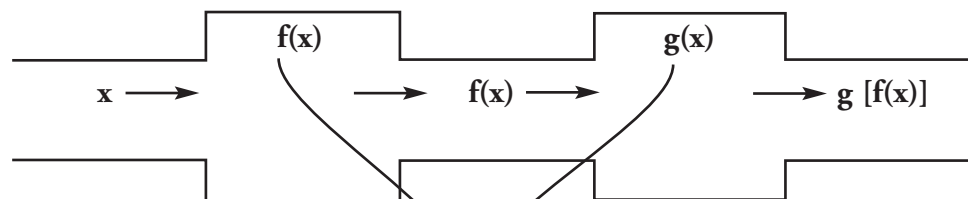
El operador **f(x)** multiplica por 0,25 cada dato que ingresa, y el operador **g(x)** suma 10 a cada dato que ingresa. Cuando cualquier valor **x** ingresa al “operador compuesto” anterior, el valor **y** de salida se obtiene operando en primer lugar con el valor de **x** en el operador **f** y en segundo lugar operando con el resultado obtenido, **f(x)**, en el operador **g**. Simbólicamente lo expresamos así:

$$y = g [f(x)] = 0,25 \cdot x + 10$$

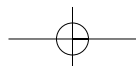
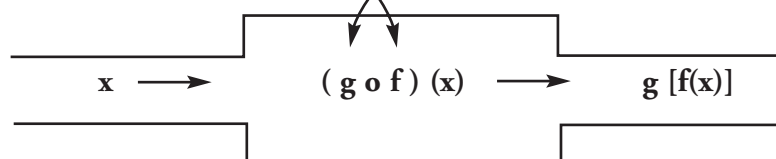
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FÓRMULA COMPUESTA

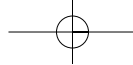
A continuación representaremos al “operador compuesto” anterior sin que se vean los “operadores elementales” que lo forman.

Al operador:



Lo representaremos así:





Leeremos la expresión simbólica $(g \circ f)$ como “**g compuesta con f**”.

Preste mucha atención al orden en el que intervienen los “operadores elementales” en el “operador compuesto” y a la forma en que se escribe esto simbólicamente.

A la fórmula que obtenemos al componer dos operadores elementales la llamaremos **fórmula compuesta**.

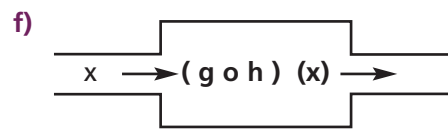
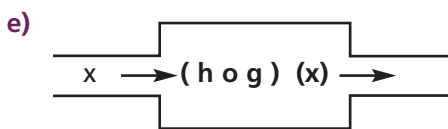
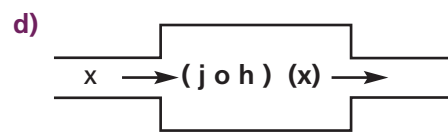
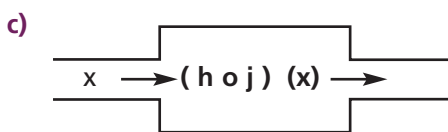
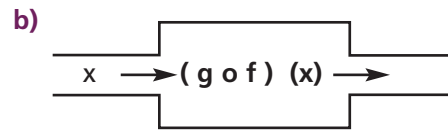
Parte C

Si ahora llamamos:

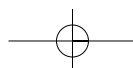
- **f** a un operador que eleva al cuadrado el dato que ingresa.
- **g** a un operador que suma 5 al dato que ingresa.
- **h** a un operador que eleva al cubo al dato que ingresa.
- **j** a un operador que divide por 2 al dato que ingresa.

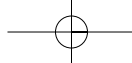
Responda las siguientes consignas:

1. Obtenga la fórmula de cada uno de los siguientes operadores compuestos. (Sugerencia: en cada caso, arme la secuencia de operadores elementales que intervienen en el operador compuesto y, si le hace falta, asigne a x valores numéricos que le permitan visualizar las operaciones que intervienen y el orden en el que lo hacen.)



2. Responda las siguientes preguntas referidas a lo que trabajó en el ítem 1.:
 - a) Compare la fórmula obtenida en el ítem 1.a) con la obtenida en el ítem 1. b) ¿Son iguales?
 - b) ¿Y la obtenida en 1. c) respecto de la que obtuvo en 1. d)? ¿Y la que encontró en 1. e) respecto de la que encontró en 1. f)?
 - c) En general, ¿cómo cree que resultará la fórmula de $(f \circ g)(x)$ respecto de la fórmula de $(g \circ f)(x)$ para cualquier par de operadores $f(x)$ y $g(x)$?





ORIENTACIONES

De acuerdo con lo realizado en la **Parte C** de esta actividad podemos observar que no obtenemos la misma fórmula al armar el operador compuesto $(f \circ g)(x)$ que al armar el operador $(g \circ f)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f [g(x)] = (x + 5)^2 \qquad (g \circ f)(x) = g [f(x)] = x^2 + 5$$

Si las fórmulas que obtuvo le quedaron exactamente al revés que éstas, vuelva a mirar en "En términos matemáticos" la forma en que se simboliza la composición y el orden en que intervienen los operadores elementales. Trate de visualizar allí cuál de los dos operadores interviene primero en la composición cuando escribimos simbólicamente $(f \circ g)(x)$.

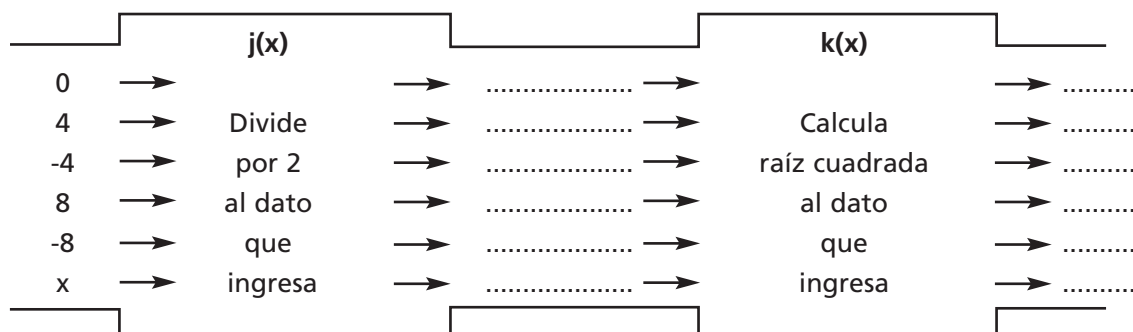
También resultan distintas la fórmula de $(h \circ j)(x)$ respecto de la fórmula de $(j \circ h)(x)$ y la de $(h \circ g)(x)$ respecto de la de $(g \circ h)(x)$.

Podemos concluir entonces que, en general, no obtenemos la misma fórmula al armar un operador compuesto en un orden u otro. Más adelante completaremos esta idea.

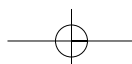
Parte D

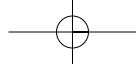
Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué números tendrán "salida" en el conjunto de los números reales a través del siguiente operador compuesto? Para responder complete la secuencia:



2. En general, ¿qué números pueden tener salida a través del operador compuesto anterior? ¿Por qué?





ORIENTACIONES

Usted debe haber verificado que hay valores que ingresan al operador compuesto anterior para los que no hay ningún valor de “salida”. Por ejemplo -8 cuyo valor de salida de $\mathbf{j(x)}$ es -4 , no puede ser operado en $\mathbf{k(x)}$ porque no existe la raíz cuadrada de un número negativo en el conjunto de los números reales. Ningún valor de \mathbf{x} negativo tendrá salida a través del operador compuesto $(\mathbf{k \circ j})(\mathbf{x})$ ya que al dividir por 2 a un número negativo el resultado siempre será negativo y ninguno de estos números podrá ser operado en \mathbf{k} . Cualquier otro valor tiene salida a través del operador compuesto ya que cualquier número no negativo dividido por 2 da resultado no negativo y para cualquier número no negativo existe su raíz cuadrada en el conjunto \mathbf{R} .

Si tiene dudas sobre radicación en el conjunto de los números reales, retome este tema en la Unidad 1 de esta Guía de estudio.

En general, para que un número que “ingresa” a un operador compuesto tenga “salida” a través del mismo debe ocurrir que:

- Tenga “salida” a través del primer operador.
- El número que sale del primer operador pueda ser operado en el segundo.

3. Si pensamos en una función \mathbf{j} cuya fórmula sea la definida por el operador $\mathbf{j(x)}$ del ítem 1., es decir, por ejemplo:

$$\mathbf{j: R \rightarrow R / j(x) = \frac{x}{2}}$$

¿Qué nombre recibe el conjunto formado por todos los elementos que están en la “salida” del “operador” $\mathbf{j(x)}$?

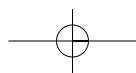
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FUNCIÓN COMPUESTA

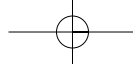
El conjunto formado por todos los elementos que están en la “salida” del primer operador es el conjunto imagen de la primera función. En este caso, $\mathbf{Im j}$.

El conjunto formado por los elementos que pueden ser operados a través del segundo operador son los elementos pertenecientes al dominio de la segunda función. En este caso, $\mathbf{Dom k}$.

La composición $(\mathbf{k \circ j})(\mathbf{x})$ no es función de \mathbf{R} en \mathbf{R} ya que no todos los elementos del conjunto imagen de \mathbf{j} pertenecen al dominio de \mathbf{k} .

En general para cualquier par de funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} , diremos que la composición $(\mathbf{f \circ g})$ es función si todos los elementos del conjunto imagen de \mathbf{g} (elementos





de salida de **g**) pertenecen al dominio de **f** (elementos que pueden ser operados a través de **f**).

* El símbolo \subset se lee "incluido en". Se dice que un conjunto A está incluido en otro conjunto B si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B.

Simbólicamente:

Dadas **f**: $A \rightarrow B / y = f(x)$ y **g**: $C \rightarrow D / y = g(x)$, tales que $\text{Im } g \subset A^*$, puede obtenerse una función **(f o g)**: $C \rightarrow B / (f \circ g)(x) = f[g(x)]$ a la que llamaremos **función f compuesta con g**.

Parte E

Para los siguientes operadores elementales:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x - 5$$

$$j(x) = \sqrt{x}$$

1. Obtenga las fórmulas de los operadores compuestos que se indican en cada caso:

- $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$
- $(g \circ j)(x) = g[j(x)]$
- $(j \circ g)(x) = j[g(x)]$
- $(j \circ g \circ f)(x) = j[g[f(x)]]$
- $(g \circ f \circ j)(x) = g[f[j(x)]]$

Si la notación simbólica le genera dificultades revise las actividades anteriores y la notación introducida en ellas.

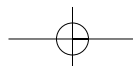
2. Analice en cuáles de las composiciones anteriores el operador compuesto define una función si consideramos que **f** y **g** son funciones definidas de \mathbf{R} en \mathbf{R} , y que la función **j** está definida de $\mathbf{R}_{\geq 0}$ en \mathbf{R} .
3. Encuentre cada uno de los operadores elementales que intervienen en las composiciones que determinan los siguientes operadores compuestos. Es decir, indique en cada caso qué operación realiza cada operador elemental:

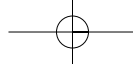
a) $(p \circ r \circ s)(x) = p[r[s(x)]] = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$

b) $(s \circ r \circ p)(x) = s[r[p(x)]] = \frac{x^2 + 1}{3}$

c) $(r \circ s \circ p)(x) = r[s[p(x)]] = \frac{x^2}{3} + 1$

d) $(r \circ p \circ s)(x) = r[p[s(x)]] = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1$





ORIENTACIONES

Los operadores p , r y s que intervienen en todas las composiciones anteriores son:

$$p(x) = x^2$$

$$r(x) = x + 1$$

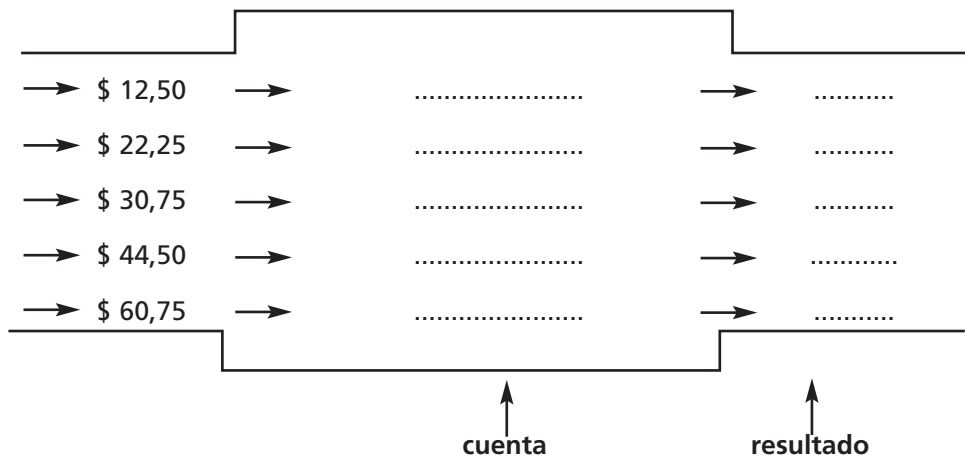
$$s(x) = \frac{x}{3}$$

Parte F

Mauro sigue analizando su presupuesto y se le ocurre que debería hacer sus cuentas “al revés”. Es decir, calcular qué cantidad de cemento podría comprar en función de la cantidad de dinero que pudiera ir ahorrando. Decide entonces “deshacer” sus cuentas anteriores para poder encontrar una fórmula que le permita calcular la cantidad de cemento que puede comprar de acuerdo con la cantidad de dinero que tenga.

Responda las siguientes consignas de acuerdo con la información anterior:

- Complete el siguiente operador de modo que el mismo “deshaga” las operaciones realizadas por el primer operador utilizado por Mauro. Ahora cada dato que ingresa debe representar el precio a pagar por comprar cierta cantidad de cemento (sin tener en cuenta el flete) y el dato que sale debe representar la cantidad de cemento que Mauro puede comprar con esa cantidad de dinero.

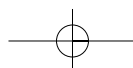


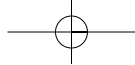
- ¿Qué operación realiza este operador con cada dato que ingresa?
- Escriba la fórmula con que este operador obtiene el dato de salida correspondiente a cada dato que ingresa.

ORIENTACIONES

El operador que “deshace” lo hecho por el primer operador utilizado por Mauro divide por 0,25 a cada dato que ingresa.

Decimos que el operador que “**divide por 0,25**” es el “**operador inverso**” del operador que “**multiplica por 0,25**”.





La fórmula con que este operador obtiene cada dato y de salida correspondiente a cada dato x que ingresa es $y = \frac{x}{0,25}$

Observe que los datos que salen del “operador inverso” son los mismos que fueron los datos de entrada en el primer operador que utilizó Mauro.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FÓRMULA INVERSA

En general llamaremos “operador inverso” a aquel que “deshace” lo hecho por otro operador.

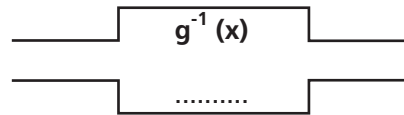
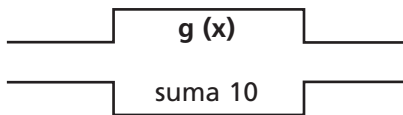
A la fórmula $y = \frac{x}{0,25}$ la llamaremos **fórmula inversa** de la fórmula $y = 0,25 \cdot x$

Si llamamos $f(x)$ a la fórmula expresada por un operador cualquiera, simbolizaremos con $f^{-1}(x)$ a la fórmula expresada por su operador inverso.

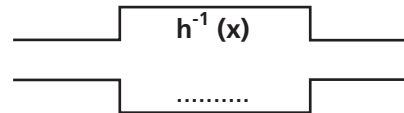
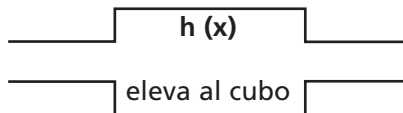
Parte G

1. Escriba, en cada caso, la cuenta que realiza el “operador inverso” de cada uno de los operadores dados:

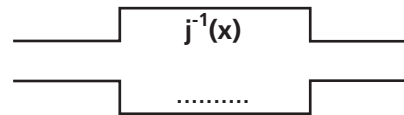
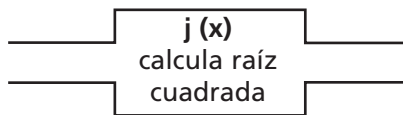
a)



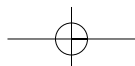
b)



c)



2. Escriba las fórmulas que expresan los operadores $g(x)$, $h(x)$ y $j(x)$ y las de sus respectivos operadores inversos $g^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$ y $j^{-1}(x)$.



Parte H

Obtenga las fórmulas que expresan a cada uno de los siguientes operadores compuestos utilizando las fórmulas que obtuvo en el ítem 2. de la **Parte G**:

1. $(g \circ g^{-1})(x)$ y $(g^{-1} \circ g)(x)$
2. $(h \circ h^{-1})(x)$ y $(h^{-1} \circ h)(x)$
3. $(j \circ j^{-1})(x)$ y $(j^{-1} \circ j)(x)$

ORIENTACIONES

El operador compuesto $(g \circ g^{-1})(x)$ tiene la misma fórmula que el operador compuesto $(g^{-1} \circ g)(x)$. Simbólicamente:

$$(g \circ g^{-1})(x) = (g^{-1} \circ g)(x) = x$$

Ocurre lo mismo con los demás operadores compuestos pedidos en la **Parte H**.

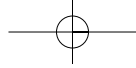
Estos resultados nos permiten completar las conclusiones que habíamos obtenido en la **Parte C** de esta actividad. Allí habíamos observado que, en general, no obtenemos la misma fórmula al componer dos operadores cualquiera en un orden u otro. Lo hecho en la **Parte H** de esta actividad nos permite agregar que cuando se componen entre sí “operadores inversos”, el resultado de la composición es el mismo en un orden u otro.

Además, en todas las composiciones pedidas en la **Parte H**, podemos observar que el resultado de componer un operador con su operador inverso es siempre x , es decir, el dato de salida del operador compuesto es el mismo dato que ingresa. ¿Por qué? Le dejamos planteada esta inquietud.

Parte I

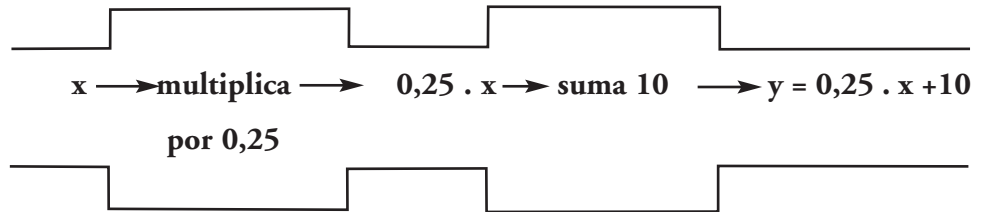
Mauro había armado la fórmula $y = 0,25 \cdot x + 10$ para calcular cuánto debería pagar por recibir en su domicilio una cantidad x de cemento.

1. Dibuje la secuencia de operadores elementales tales que si al primero de ellos entra el dato x , el dato de salida del segundo sea $0,25 \cdot x + 10$
2. ¿Con qué operadores puede “deshacer” cada una de las operaciones efectuadas por los operadores que intervienen en la secuencia anterior?
3. ¿Cuál de las dos operaciones es la que debe “deshacer” primero?
4. Dibuje la secuencia de operadores elementales que permite “deshacer” la secuencia de operadores que dio en el ítem 1..
5. Escriba la fórmula del operador inverso del operador $y = 0,25 \cdot x + 10$

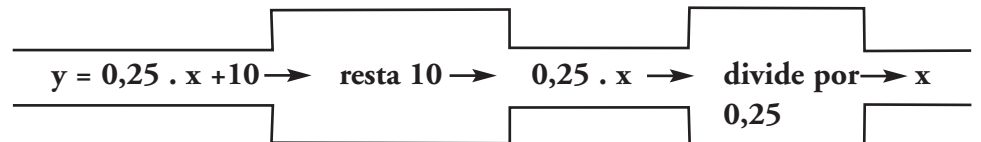


ORIENTACIONES

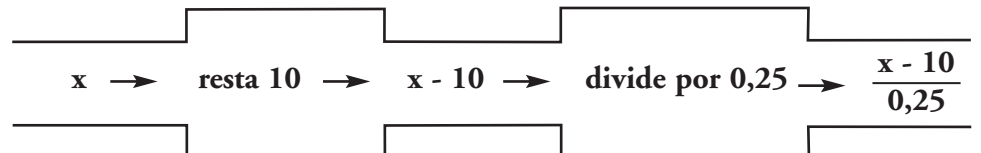
La secuencia de operadores elementales que determinan la fórmula $y = 0,25 \cdot x + 10$ es:



Para “deshacer” lo hecho por este operador debemos comenzar por “deshacer” lo hecho por el último operador que intervino en la composición (el que suma 10). La secuencia que “deshace” lo hecho por el operador compuesto anterior es:



Considerando las cuentas que realiza cada operador elemental de la última secuencia, y llamando x a cualquier dato que ingrese a la misma, nos queda:



La fórmula del operador inverso es:

$$y = \frac{x - 10}{0,25}$$

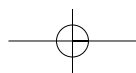
También podemos decir que $y = \frac{x - 10}{0,25}$ es la fórmula inversa de

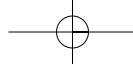
$$y = 0,25 \cdot x + 10$$

Parte J

De acuerdo con lo hecho en las Partes F, G, H e I, escriba las fórmulas inversas de cada una de las siguientes fórmulas. (Sugerencia: dibuje la secuencia de operadores correspondientes a cada una de ellas y la secuencia de operadores que “deshace” lo hecho por la primera):

- $h(x) = 3 \cdot x^2 + 4$
- $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{27} - 8$
- $h(x) = 3 \cdot (x + 4)^2$
- $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x - 8}}{27}$





$$\bullet h(x) = (3 \cdot x + 4)^2$$

$$\bullet h(x) = \sqrt[3]{\frac{x-8}{27}}$$

$$\bullet h(x) = (3 \cdot x)^2 + 4$$

$$\bullet h(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{27}} - 8$$

Parte K

1. Dibuje el operador que representa a la función:

$$f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \{0; 1; 4\} / f(x) = x^2$$

y responda las siguientes consignas:

a) ¿Cuál es su operador inverso? Representélo.

b) Escriba la fórmula inversa de $f(x)$.

c) Si llamamos f^{-1} a la relación inversa de f :

- ¿Cuál es el conjunto de partida de f^{-1} ?
- ¿Cuál es el conjunto de llegada de f^{-1} ?
- ¿Es f^{-1} función de $\{0; 1; 4\}$ en $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$? ¿Por qué?

2. A partir del análisis realizado en el ítem 1. decida si las relaciones inversas de las siguientes funciones son funciones. Justifique su respuesta lo más ampliamente que pueda. (Sugerencia: si le hace falta, arme los operadores correspondientes).

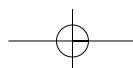
- $g: \{0; 1; 2; 3\} \rightarrow \{0; 1; 4; 9\} / g(x) = x^2$
- $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} / h(x) = x^2$
- $j: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} / j(x) = x^2$

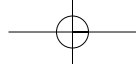
ORIENTACIONES

La relación $f^{-1}: \{0; 1; 4\} \rightarrow \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ no es función ya que el 1 y el 4 del conjunto de partida tienen dos imágenes en el conjunto de llegada.

¿Por qué ocurre esto? Porque la función f no es inyectiva ya que hay elementos distintos del conjunto de partida que tienen la misma imagen (por ejemplo 1 y -1 tienen por imagen a 1). Lo mismo ocurre con la función $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} / h(x) = x^2$.

Sin embargo, g y j son inyectivas y sus relaciones inversas son funciones.





3. Decida si las relaciones inversas de las siguientes funciones son funciones. Justifique su respuesta lo más ampliamente que pueda. (Si le hace falta, arme los operadores correspondientes.)

- $k: \{0; 1; 2\} \rightarrow \{-4; -1; 0; 1; 4\} / k(x) = x^2$
- $n: \{0; 1; 2\} \rightarrow \{0; 1; 4\} / n(x) = x^2$
- $m: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} / m(x) = x^2$

ORIENTACIONES

La relación $k^{-1}: \{-4; -1; 0; 1; 4\} \rightarrow \{0; 1; 2\} / k^{-1}(x) = \sqrt{x}$ no es función ya que -1 y -4 del conjunto de partida no tienen imagen a través de k^{-1} .

¿Por qué ocurre esto? Porque la función k no es sobreyectiva, es decir, hay elementos del conjunto de llegada de k que no son imagen de ningún elemento del conjunto de partida. Al invertir la relación estos elementos, que en la función k forman parte del conjunto de llegada, en k^{-1} pasan a formar parte del conjunto de partida y al no tener imagen la relación inversa no es función.

Las relaciones n^{-1} y m^{-1} sí son funciones debido a que las funciones n y m son inyectivas y sobreyectivas, o sea que ambas son biyectivas. Lo mismo ocurre con las funciones g y j del ítem 2.

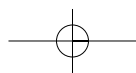
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FUNCIÓN INVERSA

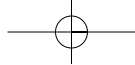
La relación inversa de una función $f: A \rightarrow B / y = f(x)$ es una función

$$f^{-1}: B \rightarrow A / y = f^{-1}(x)$$

si y sólo si la función f es biyectiva.

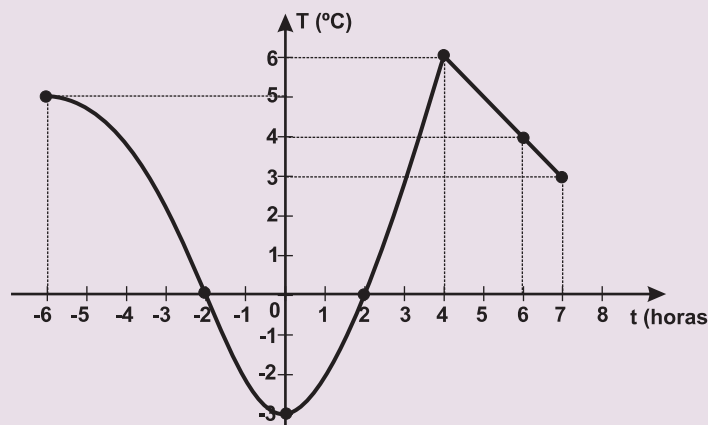
Además debe verificarse que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo x perteneciente al dominio de la función compuesta.





ACTIVIDAD N° 3: “TEMPERATURA DE LA SUSTANCIA DURANTE SU ELABORACIÓN”

El jefe de la planta industrial K - S. A continúa investigando el proceso de elaboración de la sustancia. Esta vez se dedicó a analizar la evolución de la temperatura de la sustancia en las diferentes etapas del proceso de elaboración. De acuerdo con los registros realizados por un aparato durante un período de 13 horas, el jefe de la planta construyó el siguiente gráfico en el que representó la temperatura de la sustancia (en °C) en función del tiempo transcurrido (medido en horas). Por cuestiones técnicas directamente vinculadas a las características de la sustancia en elaboración, el jefe eligió tomar como $t = 0$ al instante en que la temperatura registrada fue de -3 °C.

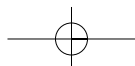


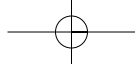
Parte A

Responda las siguientes preguntas a partir de la observación del gráfico anterior, que corresponde a la función T:

1. ¿Cuál o cuáles son los ceros de la función T? Escriba C^0 .
2. ¿Cuáles son los intervalos de positividad de la función T? Escriba C^+ .
3. ¿Cuáles son los intervalos de negatividad de la función T? Escriba C^- .
4. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento de la función T? Escribalos.
5. ¿Cuáles son los intervalos de decrecimiento de la función T? Escribalos.
6. ¿Cuáles son los máximos y mínimos de la función T? Escribalos.

Si los términos y la simbología utilizada en las preguntas anteriores le resultan desconocidos, trabájelos previamente en la Unidad 1 de Matemática B.





ORIENTACIONES

- Los ceros de la función T son $t = -2$ y $t = 2$ ya que la temperatura de la sustancia es de 0°C en esos dos instantes. En símbolos: $T(-2) = 0$ y $T(2) = 0$. Al conjunto formado por todos los ceros de la función lo escribimos:

$$C^0 = \{-2 ; 2\}$$

- Entre los instantes $t = -2$ y $t = 2$ la temperatura de la sustancia es menor que cero, por esa razón el conjunto $(-2 ; 2)$ es un intervalo de negatividad de la función T . En símbolos:

$$C^- = (-2 ; 2)$$

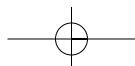
- Entre $t = -6$ y $t = -2$ la sustancia alcanza temperaturas mayores que cero. Lo mismo ocurre entre $t = 2$ y $t = 7$. Por lo tanto, los conjuntos $(-6 ; -2)$ y $(2 ; 7)$ son intervalos de positividad de la función T . En símbolos:

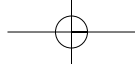
$$C^+ = (-6 ; -2) \cup (2 ; 7)$$

- La temperatura de la sustancia aumenta entre $t = 0$ y $t = 4$, por esa razón la función T es creciente en el intervalo $(0 ; 4)$. La temperatura de la sustancia disminuye en los demás períodos de análisis. Por lo tanto, la función T es decreciente en los intervalos $(-6 ; 0)$ y $(4 ; 7)$.
- La sustancia alcanzó su temperatura más baja de 3°C bajo cero en el instante $t = 0$. Decimos que la función T alcanza un mínimo en $t = 0$ y que el mínimo valor alcanzado es $T = -3$.
- La sustancia alcanzó su temperatura más alta en el instante $t = 4$ y dicha temperatura fue de 6°C . Decimos que la función T alcanza un máximo en $t = 4$ y el máximo valor alcanzado es $T = 6$.

Parte B

1. Observe el gráfico de la función T en el intervalo en el que la función está creciendo y responda las siguientes preguntas:
 - a) Observando que $t = 2$ y $t = 3$ pertenecen a este intervalo, y que la hora 2 es anterior a la hora 3, ¿qué puede decir de la temperatura de la sustancia en la hora 2 respecto de la temperatura de la sustancia en la hora 3?
 - b) Lea los símbolos y responda:
 $t = 2$ y $t = 3 \in (0 ; 4)$, $2 < 3$ entonces: ¿Cómo son entre sí $T(2)$ y $T(3)$?
 - c) Si t_1 y t_2 son dos tiempos cualesquiera del intervalo $(0 ; 4)$, de tal manera que $t_1 < t_2$, ¿cómo son entre sí $T(t_1)$ y $T(t_2)$?

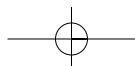


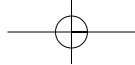


2. Observe ahora el gráfico de la función T en el intervalo $(4 ; 7)$ y responda las siguientes preguntas:
- Siendo $t = 5$ y $t = 6$ valores que pertenecen a este intervalo, ¿qué puede decir de la temperatura de la sustancia en $t = 5$ respecto de la temperatura de la sustancia en $t = 6$?
 - Lea los símbolos y responda:
 $t = 5$ y $t = 6 \in (4 ; 7)$, $5 < 6$ entonces: ¿cómo son entre sí $T(5)$ y $T(6)$?
 - Si t_1 y t_2 son dos tiempos cualesquiera del intervalo $(4 ; 7)$, de tal manera que $t_1 < t_2$, ¿cómo son entre sí $T(t_1)$ y $T(t_2)$?
3. ¿Qué diría sobre el crecimiento de la función en el intervalo $(-2 ; 2)$?

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FUNCIÓN CRECIENTE Y FUNCIÓN DECRECIENTE

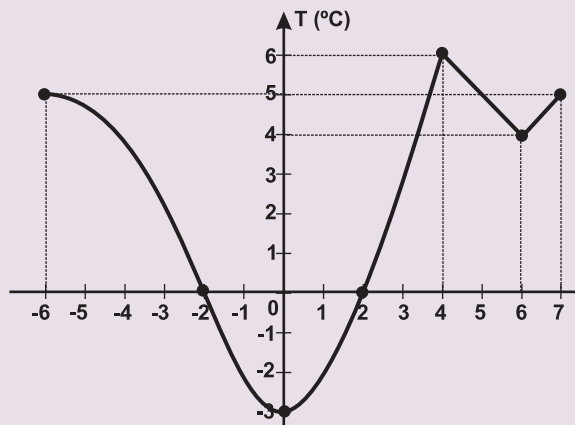
- Si expresamos en símbolos matemáticos lo que ocurre con la función T en el intervalo $(0 ; 4)$, resulta que:
 Si t_1 y t_2 son dos tiempos cualesquiera pertenecientes a ese intervalo, de tal manera que $t_1 < t_2$ ocurre que $T(t_1) < T(t_2)$.
 En general, cuando una función f es estrictamente creciente en un intervalo, para cualquier x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo se verifica que si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- Si expresamos en símbolos matemáticos lo que ocurre con la función T , por ejemplo, en el intervalo $(4 ; 7)$, resulta que:
 Si t_1 y t_2 son dos tiempos cualesquiera de ese intervalo, de tal manera que $t_1 < t_2$ ocurre que $T(t_1) > T(t_2)$.
 En general, cuando una función f es estrictamente decreciente en un intervalo, para cualquier x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo se verifica que si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
- La función T decrece en $(-2 ; 0)$ y crece en $(0 ; 2)$. En casos como éste diremos que la función no crece ni decrece en el intervalo $(-2 ; 2)$.





Parte C

El proceso de elaboración de la sustancia puede ser alterado en su última hora con el objetivo de que la temperatura de la misma comience a aumentar en lugar de continuar disminuyendo. La representación gráfica del proceso completo con esta modificación es:



A partir de la observación del gráfico anterior, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ocurre con la temperatura de la sustancia en los instantes previos a $t = 6$?
2. ¿Qué ocurre con la temperatura de la sustancia en los instantes posteriores a $t = 6$?
3. ¿Cómo es la temperatura de la sustancia en $t = 6$ respecto de la temperatura de la sustancia en los instantes previos y posteriores a $t = 6$?

ORIENTACIONES

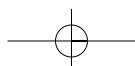
La temperatura de la sustancia en $t = 6$ es la más baja entre todas las temperaturas registradas en los instantes previos y posteriores cercanos a $t = 6$. Si bien la temperatura de la sustancia en este instante no es la más baja de todo el período de elaboración, sí es la temperatura más baja registrada para instantes t pertenecientes a un intervalo de valores tomados alrededor de $t = 6$.

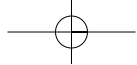
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES O RELATIVOS

De acuerdo con lo observado sobre la temperatura de la sustancia en $t = 6$, decimos que la función T alcanza un **mínimo local o relativo** en $t = 6$.

En general, en una función $f: A \rightarrow B / y = f(x)$ diremos que:

- $f(a)$ es un **mínimo local o relativo** de la función f , o que la función f alcanza un mínimo local en $x = a$, si el valor $f(a)$ es menor que los valores $f(x)$





alcanzados para valores de x pertenecientes a un intervalo de valores tomados alrededor de $x = a$. Si además $f(a)$ es menor que $f(x)$ para cualquier x perteneciente al dominio de la función, entonces en $x = a$ la función alcanza un **mínimo absoluto**.

- $f(a)$ es un **máximo local o relativo** de la función f , o que la función f alcanza un máximo local en $x = a$, si el valor $f(a)$ es mayor que los valores $f(x)$ alcanzados para valores de x pertenecientes a un intervalo de valores tomados alrededor de $x = a$. Si además $f(a)$ es mayor que $f(x)$ para cualquier x perteneciente al dominio de la función, entonces en $x = a$ la función alcanza un **máximo absoluto**.

ACTIVIDAD N° 4: “INFORME SOBRE EL PROCESO DE ELABORACIÓN DE LA SUSTANCIA”

Para escribir sus conclusiones y elaborar el informe final, el jefe de la planta consulta algunos informes recibidos por Internet referidos al proceso de elaboración de otras sustancias de características similares a los de la sustancia que elabora su planta.

Algunas de las cuestiones observadas en relación con la temperatura de dos sustancias A y B durante sus procesos de elaboración son:

Sustancia A:

El proceso de elaboración de la sustancia dura 9 horas.

Se elige a $t = -4$ como el instante de inicio de las observaciones.

La temperatura de la sustancia es de 0°C únicamente en $t = -1$ y $t = 3$.

La temperatura de la sustancia en $t = -3$ es negativa.

La temperatura de la sustancia en $t = 1$ y en $t = 4$ es positiva.

La función que representa la temperatura de la sustancia en función del tiempo de elaboración transcurrido es continua.

Sustancia B:

El proceso de elaboración de la sustancia dura 10 horas.

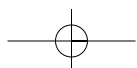
Las observaciones se registran a partir de un instante que se consigna como $t = -5$.

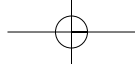
La función que representa la temperatura de la sustancia en función del tiempo de elaboración transcurrido es continua.

La temperatura de la sustancia vale 0°C sólo en 3 instantes de su período de elaboración: en $t = -4$, $t = 0$ y $t = 3$.

La temperatura en $t = -2$ es menor que cero.

La temperatura de la sustancia es positiva en $t = -3$.





Luego de leer ambos informes un par de veces el jefe se da cuenta que algo no le cierra. Para continuar con su análisis, pero visualizando mejor lo ocurrido, decide representar gráficamente las funciones que expresan la temperatura de cada una de esas sustancias en el proceso de elaboración.

La gráfica de una función continua no se “corta” a lo largo de toda la representación. Es una gráfica que podemos realizar sin levantar el lápiz del papel.

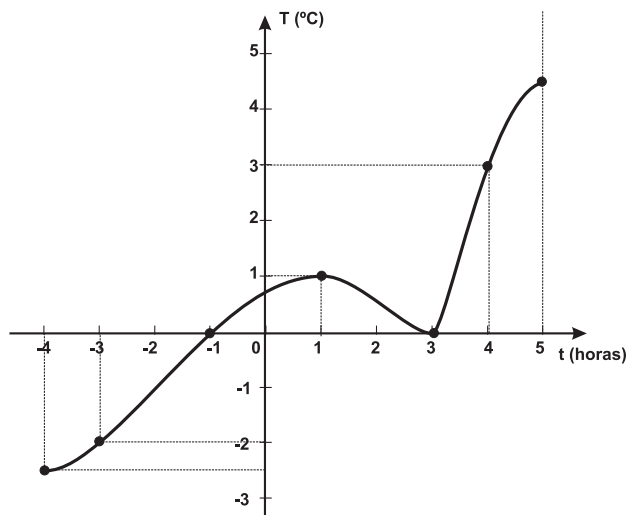
Parte A

Le pedimos que colabore con el jefe de la planta en su tarea:

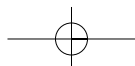
1. Represente gráficamente, siempre y cuando sea posible, una función que verifique todas las condiciones enunciadas sobre la temperatura de la sustancia A en su proceso de elaboración.
2. Represente gráficamente, siempre y cuando sea posible, una función que verifique todas las condiciones enunciadas sobre la temperatura de la sustancia B en su proceso de elaboración.

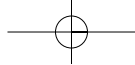
ORIENTACIONES

Una representación gráfica posible para la evolución de la temperatura de la sustancia A es:



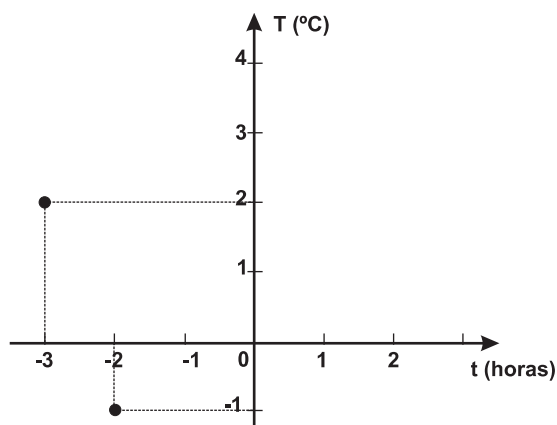
Decimos que el anterior es un gráfico “posible” porque no es el único que verifica todas las condiciones enumeradas para la temperatura de la sustancia A. El suyo puede no coincidir con el nuestro y ser igualmente correcto.





Para la sustancia B se confirman las sospechas del jefe de la planta: no es posible representar una función que cumpla con todas las condiciones descritas para la temperatura durante el proceso de elaboración de la sustancia. ¿Por qué? Veamos:

El informe dice que la temperatura en $t = -3$ es positiva y en $t = -2$ es negativa. Podríamos representar lo anterior del siguiente modo:

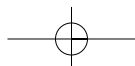


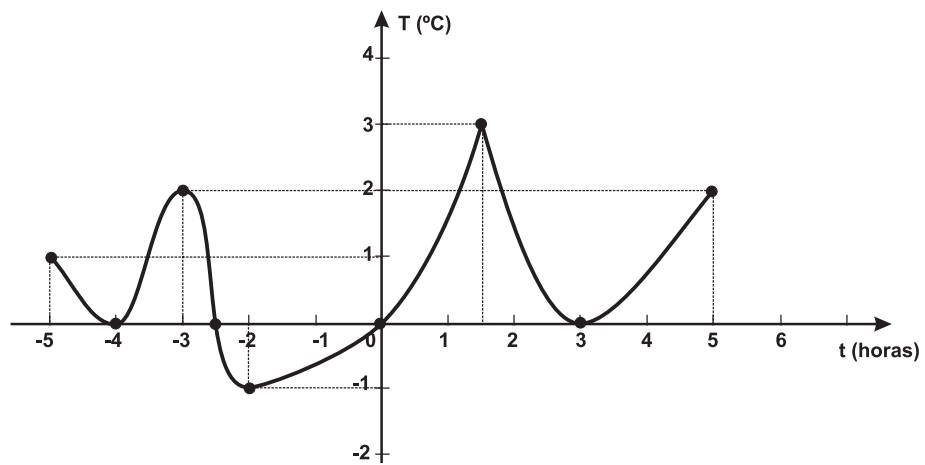
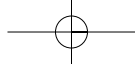
Como el gráfico de la función debe ser continuo, para pasar de una temperatura positiva en $t = -3$ a una temperatura negativa en $t = -2$, la gráfica de la función debería cortar al eje t en algún valor del intervalo $(-3 ; -2)$. Es decir, que la función debería tener un cero en este intervalo. Sin embargo, de acuerdo con los datos del informe, la temperatura sólo vale 0°C en $t = -4$, $t = 0$ y $t = 3$.

- ¿Qué error podemos suponer que tiene el informe que describe lo ocurrido con la temperatura de la sustancia B durante su proceso de elaboración? Corríjalo de modo que sea posible representar una función que verifique todas las condiciones.

ORIENTACIONES

Un error posible del informe podría ser que al indicar los instantes en los que la temperatura vale 0°C omitieron decir que también ocurre esto en $t = -2,5$, por ejemplo. Agregada esta información es posible construir una representación gráfica que exprese la temperatura de la sustancia B en su período de elaboración:





EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: TEOREMA DE BOLZANO

En esta actividad podemos observar que **si la función es continua** en el intervalo $[-3 ; 2]$ y tiene en -3 y en -2 imágenes de signos opuestos, debe haber algún valor perteneciente al intervalo $(-3 ; 2)$ cuya imagen sea cero. Es decir, la función debe tener al menos un cero en ese intervalo.

En general, si una función f es **continua** en un intervalo $[a ; b]$ y se verifica que el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, puede asegurarse que existe al menos un número c perteneciente al intervalo $(a ; b)$ (o sea $a < c < b$) tal que $f(c) = 0$. Es decir que la función f debe tener un cero en $x = c$.

Conocemos a esta conclusión como teorema de Bolzano

Parte B

El informe recibido sobre la sustancia C dice:

Las observaciones se registraron durante 12 horas a partir de $t = -5$.

La función que representa la temperatura de la sustancia en función del tiempo de elaboración transcurrido es continua.

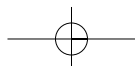
La temperatura de la sustancia vale 0°C únicamente en $t = -3$, $t = 1$ y $t = 5$.

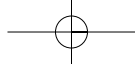
Si llamamos T a la función que expresa la temperatura de la sustancia C en su proceso de elaboración, se verifica que:

$$T(-4) = -1 \quad T(0) = 1 \quad T(2) = 1 \quad T(6) = -2$$

Responda las siguientes consignas utilizando la información anterior:

1. Represente gráficamente una función T que exprese la temperatura de la sustancia C durante todo su proceso de elaboración.





2. ¿Qué signo tiene la función T en cada uno de los siguientes intervalos: $[-5 ; -3)$; $(-3 ; 1)$; $(1 ; 5)$; $(5 ; 7]$?
3. La función T , ¿puede cambiar de signo en algún instante t perteneciente a cualquiera de los intervalos anteriores? ¿Por qué?
4. Indique los intervalos de positividad y de negatividad de la función T .

ORIENTACIONES

A partir del dominio y de los ceros de la función, podemos determinar los siguientes intervalos:

$$[-5 ; -3) ; (-3 ; 1) ; (1 ; 5) ; (5 ; 7]$$

En cada uno de ellos la función no puede cambiar de signo porque se trata de una función continua cuyos únicos ceros son $t = -3$, $t = 1$ y $t = 5$. Los cambios de signo de la función T sólo pueden darse en estos 3 valores de t .

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE BOLZANO

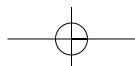
En general, si x_1, x_2, \dots, x_n son todos los ceros de una función continua f de \mathbf{R} en \mathbf{R} ordenados en forma creciente, podemos considerar los intervalos $(-\infty ; x_1)$, $(x_1 ; x_2)$, ... $(x_n ; +\infty)$. En cada uno de ellos, o bien $f(x)$ es mayor que cero para todo x perteneciente al intervalo o $f(x)$ es menor que cero para todo x perteneciente al intervalo.

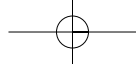
Esta conclusión es una consecuencia del Teorema de Bolzano.

Parte C

A partir del teorema de Bolzano y su consecuencia analice los intervalos de positividad y negatividad de las funciones $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cuyas fórmulas le damos a continuación. Para responder tenga en cuenta que todas las funciones polinómicas tienen representaciones gráficas continuas.

1. $f(x) = (x - 1) \cdot (x - 5)$
sabiendo que $f(0) > 0$, $f(3) < 0$ y $f(7) > 0$.
2. $f(x) = -1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)^3$
3. $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$
4. $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 3)^5$
5. $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 4x^6$
6. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$





ORIENTACIONES

Las funciones de la **Parte C** de esta actividad son todas funciones polinómicas, por lo tanto son todas continuas. De acuerdo con el teorema de Bolzano y su consecuencia, las funciones continuas sólo pueden cambiar de signo en sus ceros. Por lo tanto, para analizar los intervalos de positividad y negatividad de cualquiera de ellas debemos comenzar por buscar sus ceros.

Como las primeras cuatro fórmulas están factorizadas, es sencillo ver cuáles son los ceros de cada una de ellas.

Por ejemplo, para la función del ítem **1.**, los ceros son $x = 1$ y $x = 5$.

Como la función sólo puede cambiar de signo en estos valores, podemos dividir al dominio de la función en tres intervalos: $(-\infty ; 1)$, $(1 ; 5)$ y $(5 ; +\infty)$. En cada uno de ellos la función debe conservar el signo a lo largo de todo el intervalo.

Sabemos que $f(0) > 0$, entonces para todo x perteneciente al intervalo $(-\infty ; 1)$ resulta que $f(x) > 0$.

En el intervalo $(1 ; 5)$ sabemos que $f(3) < 0$, entonces $f(x) < 0$ en todo el intervalo.

En $(5 ; +\infty)$ podemos asegurar que $f(x) > 0$ ya que tenemos como dato que $f(7) > 0$.

Nos queda entonces:

$$C^+ = (-\infty ; 1) \cup (5 ; +\infty) \qquad C^- = (1 ; 5)$$

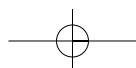
El análisis en los demás ítems de la **Parte C** es similar a éste, sólo que en el resto de los casos no hay información sobre el signo de la función en los intervalos determinados a partir de los ceros de la función.

¿Cómo puede obtener esta información en cada caso? Buscando a través de la fórmula de cada función las imágenes que hagan falta para determinar el signo de la función en cada intervalo.

Como en los ítems **5.** y **6.** las fórmulas no están factorizadas la búsqueda de los ceros no es inmediata como en los casos de los ítems **1.** a **4.** Para hacerlo deberá utilizar previamente recursos trabajados en **Matemática B** respecto de la búsqueda de ceros de una función y de la factorización de fórmulas.

Si tiene dificultades para detectar ceros de funciones polinómicas, o no sabe cómo hacerlo, trabaje este tema en las Unidades 5 y 6 de Matemática B.

Antes de comenzar a estudiar la próxima unidad, usted debe realizar los ejercicios de integración correspondientes a la Unidad 2. Su realización es imprescindible. Al resolverlos trabajará aspectos vinculados a los contenidos de la unidad que no fueron trabajados en las actividades que resolvió hasta este momento. También podrá integrar los distintos contenidos de la unidad y autoevaluar si ya se encuentra en condiciones de pasar a estudiar la próxima unidad. ¡No deje de realizarlos!



Función exponencial y función logarítmica

En esta unidad continuaremos trabajando con funciones. En este caso se trata de las funciones exponenciales y logarítmicas, que son modelos de análisis y descripción de muchas situaciones vinculadas fundamentalmente con la física, la química, la biología y la economía.

Para el estudio de estas funciones, utilizaremos los conceptos referidos a funciones ya vistos en la Unidad 2 y en Matemática A y B.

Propósitos de la unidad

En relación con los contenidos de esta unidad, le proponemos que:

- Describa y analice situaciones de la realidad utilizando como modelo a las funciones exponenciales y logarítmicas.
- Reconozca las características de estas funciones desde el punto de vista gráfico y analítico.
- Reconozca a las funciones exponenciales y logarítmicas como funciones inversas entre sí.
- Lea y exprese las funciones exponenciales y logarítmicas en lenguaje coloquial, gráfico, analítico o a través de tablas.
- Resuelva ecuaciones exponenciales y logarítmicas, teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación y de los logaritmos.
- Analice crecimiento, decrecimiento y asíntotas de funciones exponenciales y logarítmicas.

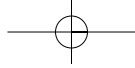
ACTIVIDAD N° 1: “REPRODUCCIÓN DE BACTERIAS”

Las bacterias son organismos unicelulares que se reproducen por un proceso llamado bipartición. En cada etapa de este proceso, cada célula (o bacteria) se divide en dos. Es decir que, después de cada etapa de la bipartición, la población de bacterias se duplica.

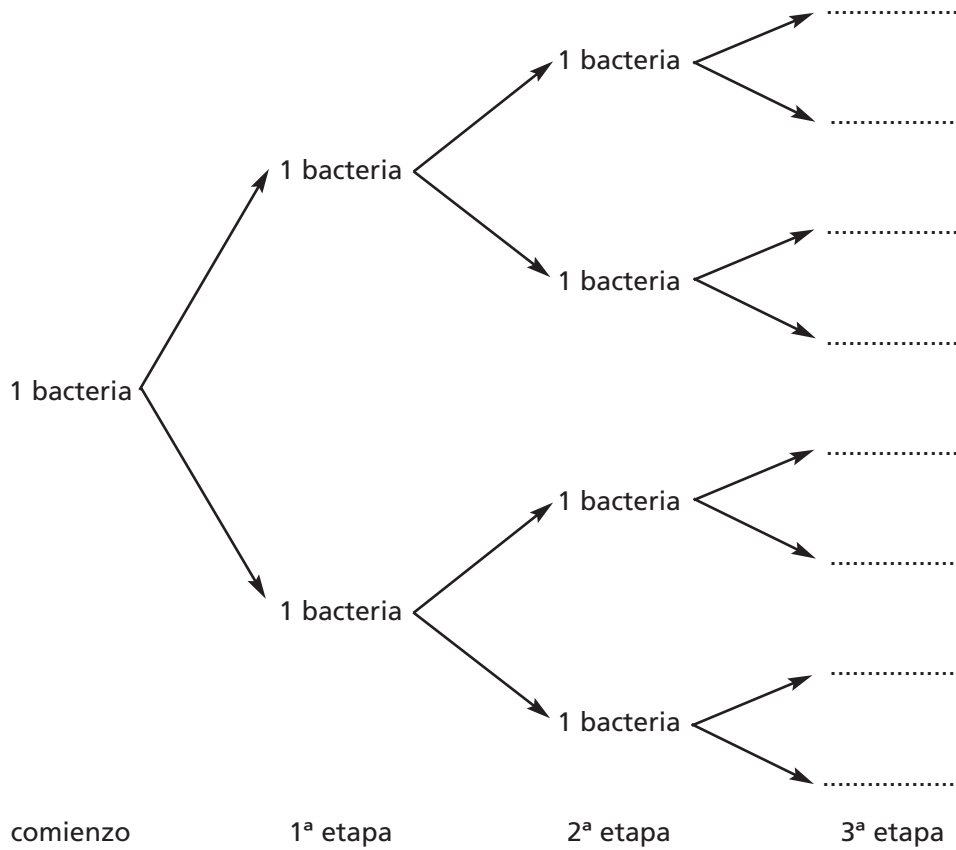
En un laboratorio se aísla una bacteria para observar las sucesivas etapas del proceso de bipartición.

Parte A

1. Teniendo en cuenta la información anterior, responda las siguientes preguntas:
 - a) Cuando finaliza la primera etapa del proceso, ¿cuántas bacterias hay?
 - b) Cuando finaliza la segunda etapa, ¿cuántas bacterias hay?

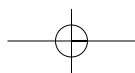


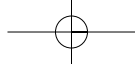
2. En el laboratorio, un empleado representa el proceso descrito con el siguiente esquema, llamado diagrama de árbol:



- a) Complete el esquema anterior hasta la cuarta etapa.
- b) Continúe el diagrama de árbol hasta la sexta etapa de modo que le permita responder la siguiente pregunta:
¿cuántas bacterias habrá al finalizar la sexta etapa de este proceso?
- c) Pensando en la forma en que se reproducen las bacterias y en cómo continúa el esquema anterior, complete la siguiente tabla en la que se consigna la cantidad **b** de bacterias observadas al finalizar cada etapa **x**:

x (número de la etapa)	0	1	2	3	4	6	9	10
b (cantidad de bacterias)	1							





- d) Para calcular la cantidad de bacterias al cabo de la novena etapa, ¿usó el 9? ¿Cómo lo usó?

Si no pudo responder la pregunta planteada en el ítem d), no se preocupe. En lo que sigue lo orientaremos para que pueda hacerlo o para que verifique su respuesta en caso de haber podido dar una.

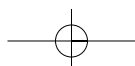
Parte B

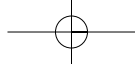
En el laboratorio, otro empleado registró lo observado con las bacterias en la siguiente planilla:

x (número de la etapa)	0	1	2	3	4	6	9	10
b (cantidad de bacterias)	1	2	2.2	2.2.2	2.2.2.2			

1. ¿Cómo anotará este empleado la cantidad de bacterias observadas en la sexta, en la novena y en la décima etapa? Complete la tabla anterior.
2. ¿Cómo aparece el 9 en el cálculo de cuántas bacterias hay al finalizar la novena etapa? ¿Cómo podemos expresar estas multiplicaciones de otra manera?
3. ¿Qué cuenta hay que hacer con cada valor de **x** para obtener la correspondiente cantidad de bacterias **b**?
4. Teniendo en cuenta la cuenta que se hace, escriba una fórmula que exprese **b** en función de **x**.
5. Verifique la fórmula que escribió en el ítem anterior. Para hacerlo, calcule utilizando la fórmula, los valores de **b** correspondientes a cada uno de los valores de **x** dados en la tabla del ítem 2. c) de la Parte A y verifique que los valores de **b** obtenidos a través de la fórmula son los mismos que usted dio en esa tabla.
6. ¿Se imagina cuántas bacterias se verán después de 30 etapas de reproducción de las bacterias? Utilice la fórmula que dio para hacer una estimación de esa cantidad.

Uso de calculadora: Para calcular una potencia con cualquier exponente con una calculadora científica debe utilizar la tecla simbolizada con x^y o y^x , según el modelo de calculadora que esté usando. Por ejemplo, para calcular 2^{20} , debe teclear la siguiente secuencia: "2" → " x^y " → "20" → "=" y obtiene el resultado.





7. Represente en un sistema de ejes coordenados cartesianos, los pares de valores (N° de etapa; cantidad de bacterias) para $x = 0$ y las primeras 5 etapas.
8. Teniendo en cuenta los significados de las variables x y b , ¿se pueden unir los puntos que representó en el ítem anterior?
9. A medida que pasan las etapas del proceso de reproducción, ¿qué ocurre con la cantidad de bacterias?

ORIENTACIONES

Las bacterias se reproducen duplicando su cantidad etapa tras etapa. La cuenta que expresa esta duplicación es una multiplicación por 2, que se repite tantas veces como etapas de reproducción hayan pasado hasta el momento. Es decir, por ejemplo, que si han pasado 9 etapas, se multiplica $2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2$ en 9 oportunidades.

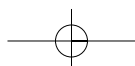
Teniendo en cuenta la definición de la **operación potenciación**, esta cuenta se puede escribir así: 2^9 . El resultado de esta cuenta expresa la cantidad de bacterias b que hay al cabo de 9 etapas.

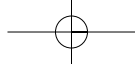
Si no entiende a qué nos referimos cuando hablamos de potenciación, sería conveniente que trabaje previamente el tema en la Unidad 2 de Matemática A y luego continúe con lo que sigue.

Si han pasado x etapas, la cuenta que debemos hacer para calcular la cantidad b de bacterias está expresada en la fórmula $b = 2^x$. ¿Coincide con la que dio usted? Por ejemplo, usando esta fórmula y la calculadora, podemos predecir que después de 30 etapas habrá 1073741824 bacterias (es decir, algo así como 1073 millones de bacterias). Esta estimación supone que el proceso de reproducción de las bacterias puede seguir de la misma forma hasta esa etapa. Estamos suponiendo que el modelo matemático dado por esta fórmula continúa siendo válido.

Además, podemos ver una ventaja del modelo de la fórmula respecto del diagrama de árbol. Usando la fórmula pudimos estimar, por ejemplo, la cantidad de bacterias luego de la 30ª etapa. ¿Se imagina el trabajo que tendría que haber hecho para completar un diagrama de árbol hasta la 30ª etapa y contar semejante cantidad de bacterias?

Como x representa a la cantidad de etapas, debe ser un número natural. Teniendo en cuenta que b expresa a la cantidad de bacterias, también debe ser un número natural diferente de cero. Por lo tanto, y si suponemos que este





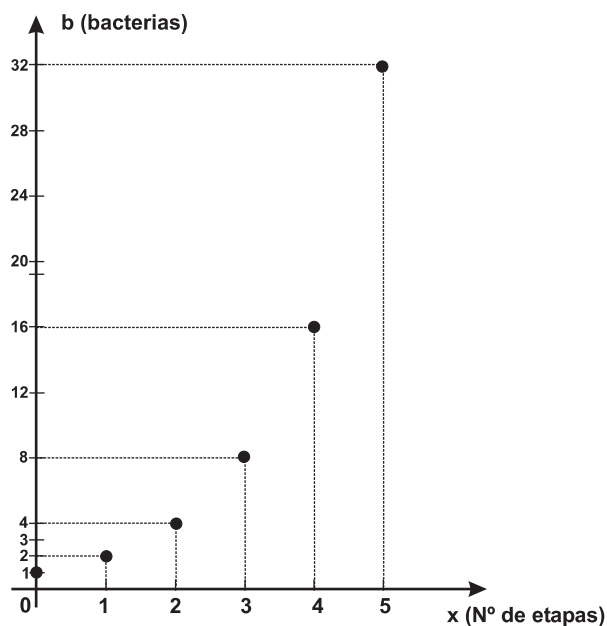
proceso de reproducción de las bacterias sigue siendo de la misma manera para cualquier cantidad de etapas, la función que lo describe es:

$$b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\} / b(x) = 2^x.$$

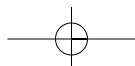
Recordemos que con \mathbb{N} simbolizamos al conjunto de los números naturales con el cero. Por lo tanto, la expresión $\mathbb{N} - \{0\}$ simboliza al conjunto de números naturales positivos.

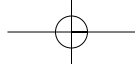
El gráfico de esta función está formado por puntos aislados. No pueden unirse ya que las dos variables que se vinculan solo pueden tomar valores enteros (por ejemplo, no tiene sentido hablar de 3,7 etapas o de 6,34 bacterias). Por lo tanto, el gráfico para las 5 primeras etapas queda así:

(Compárelo con el que hizo usted).



Observamos en el gráfico que se trata de una **función creciente**, ya que a medida que pasan las etapas, aumenta la cantidad de bacterias (en forma ilimitada).





Parte C

Durante las observaciones hechas otro día en el laboratorio, no pudieron aislar una bacteria y tuvieron que comenzar la observación del proceso de reproducción con 5 bacterias.

La planilla que confeccionaron ese día es la siguiente:

x (número de la etapa)	0	1	2	3	4	5
b (cantidad de bacterias)	5	5 · 2		5 · 2 · 2 · 2		

Le pedimos que:

1. Complete la planilla. Si le hace falta, realice el diagrama de árbol que le permite calcular la cantidad de bacterias que hay en cada etapa.
2. A partir de los valores de la tabla, escriba una fórmula que le permita calcular la cantidad de bacterias **b** al cabo de una cantidad **x** de etapas.

ORIENTACIONES

Como vimos en la **Parte B**, cuando las observaciones empiezan con una bacteria, la fórmula que permite calcular **b** a partir de **x** es $b(x) = 2^x$.

Si las observaciones comienzan con 5 bacterias, la fórmula que permite calcular **b** a partir de **x** es $b(x) = 5 \cdot 2^x$.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FÓRMULA EXPONENCIAL

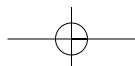
Las fórmulas $b(x) = 2^x$ y $b(x) = 5 \cdot 2^x$ son ejemplos de **fórmulas exponenciales**, ya que en ellas, la variable **x** aparece en el exponente.

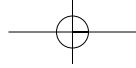
En general, las fórmulas del tipo $f(x) = k \cdot a^x$ se llaman **fórmulas exponenciales de base a**. La base **a** debe ser un número real positivo y distinto de 1.

El coeficiente **k** debe ser un número real distinto de cero.

Parte D

En el laboratorio han observado que durante el proceso de reproducción, el volumen ocupado por las bacterias se va modificando minuto a minuto. Pusieron las bacterias en frascos graduados. El jefe del laboratorio ha decidido que el instante en que se ha llenado un frasco se identifique con $t = 0$. También decidió que el volumen ocupado por las bacterias se mida en "frascos" (es decir, que la unidad de volumen que van a usar es el "frasco").





Los registros efectuados en el laboratorio se anotaron en el siguiente cuadro:

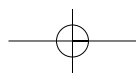
t (tiempo en minutos)	0	1	2	3	4
v (volumen en frascos)	1	2	4	8	16

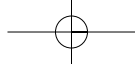
1. Responda las siguientes preguntas:
 - a) ¿Qué ocurre con el volumen ocupado por las bacterias minuto a minuto?
 - b) ¿Qué fórmula permite calcular el volumen v que ocupa la colonia de bacterias de acuerdo con el tiempo transcurrido t ? Escríbala.
2. Los tiempos anteriores al considerado como $t = 0$ se anotan con números negativos. Por ejemplo, con $t = -1$ se indica el registro efectuado 1 minuto antes del instante en que se ha completado 1 frasco. Teniendo en cuenta cómo evoluciona el volumen con el paso del tiempo:

- a) ¿Qué volumen ocupaban las bacterias en $t = -1$?
- b) ¿Qué volumen ocupaban en $t = -2$?
- c) Teniendo en cuenta la forma en que evoluciona el volumen de bacterias con el paso del tiempo, complete el siguiente cuadro usando fracciones:

t (tiempo en minutos)	-1	-2	-3	-5	-10
v (volumen en frascos)					

3. A partir de sus respuestas a los ítems 1. y 2., responda las siguientes consignas:
 - a) La fórmula que dio en el ítem 1.b), ¿se puede usar también para calcular el volumen de bacterias para valores de t negativos? Póngala a prueba verificando si puede calcular con la fórmula los pares de valores $(t ; v)$ que dio en la tabla anterior.
 - b) ¿Cuál es el volumen ocupado por las bacterias medio minuto después de que el volumen ocupado es de 1 frasco? ¿Qué cuenta hace para calcularlo? Use la fórmula para determinar dicho volumen.
 - c) ¿Qué volumen ocupan las bacterias un minuto y medio después de que se observa que el volumen ocupado es de un frasco? ¿Y 5 minutos y medio después de $t = 0$? ¿Y si $t = -2, 5$?
 - d) ¿Es posible calcular el volumen v ocupado por las bacterias para cualquier instante t perteneciente al conjunto de los números reales? Justifique su respuesta.
 - e) Teniendo en cuenta lo analizado hasta acá, defina una función f que permita describir matemáticamente lo observado en el laboratorio respecto del volumen v ocupado por las bacterias al pasar el tiempo t .





- f) Usando los pares de valores de las tablas anteriores, represente la función que definió en el ítem e) en un sistema de ejes coordenados cartesianos.
- g) Teniendo en cuenta lo que representan t y v , ¿podrá unir los puntos en esta representación gráfica?

ORIENTACIONES

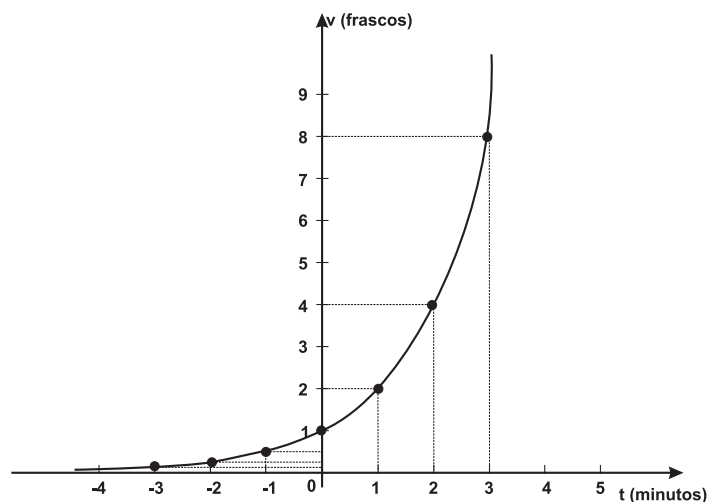
La fórmula exponencial $v(t) = 2^t$, es válida para cualquier valor de t . Por ejemplo, para $t = -1$, resulta $v(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$. De acuerdo con este resultado, en términos de la situación que estamos analizando, decimos que 0,5 frascos es el volumen ocupado por las bacterias 1 minuto antes del instante en que se observó que el volumen ocupado fue de 1 frasco.

También, si $t = 5,5$, resulta $v(5,5) = 2^{5,5} \cong 45,25$ (o sea que 5 minutos y medio después de que se observó que las bacterias ocupaban un frasco, éstas ocuparon 45,25 frascos, aproximadamente).

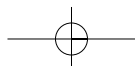
Teniendo en cuenta que para medir el tiempo se puede usar cualquier número real (es decir que t es un número real cualquiera), y que el volumen que ocupan las bacterias también puede ser un número real, podemos describir el proceso a través de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / v = f(t) = 2^t$.

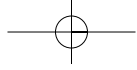
De acuerdo con lo observado en el laboratorio, esta función es un modelo matemático adecuado para describir lo visto y predecir lo que puede ocurrir con el volumen ocupado por la colonia de bacterias con el paso del tiempo.

La representación gráfica de dicha función es:



En este caso podemos unir los puntos ya que los valores que pueden tomar v y t son **números reales**.





EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FUNCIÓN EXPONENCIAL

Una función como la definida en el ítem **3. e)** de la **Parte D**, recibe el nombre de **función exponencial**.

Una **función exponencial** cualquiera puede expresarse, en general, de la siguiente manera:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / y = f(x) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}^x$$

donde la base **a** es un número real positivo (en símbolos, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}, \mathbf{a} > \mathbf{0}$) y distinto de 1 (en símbolos, $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$).

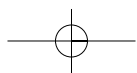
Además, el coeficiente **k** es un número real no nulo (en símbolos, $\mathbf{k} \in \mathbf{R}, \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$)

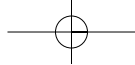
- ¿Por qué decimos que la base **a** debe ser positiva?
Si la base **a** fuera un número negativo, la potencia no estaría definida para algunos exponentes. Por ejemplo:
Si $\mathbf{a} = -\mathbf{4}$ no se podría calcular $(-\mathbf{4})^{1/2} = \sqrt{-\mathbf{4}}$ ya que esta cuenta no tiene resultado dentro de los **números reales**.
- ¿Por qué decimos que la base debe ser un número distinto de cero?
Si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ no se podrían calcular las potencias de exponente negativo ya que eso llevaría a tener que resolver una división por cero y ésta es una operación sin solución.
- ¿Por qué decimos que la base **a** no puede ser 1?
Si $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, cualquiera sea el valor de **x**, resulta que $f(x) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{1}^x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{k}$. Esta es la fórmula de una función constante, no es exponencial.
- ¿Por qué se dice que el coeficiente **k** no puede ser cero?
Si $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, resulta $f(x) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}^x = \mathbf{0}$. Esta es la fórmula de otra función constante.

Parte E

A partir de las observaciones hechas en el laboratorio, uno de los investigadores se planteó las siguientes dudas:

- *¿Qué pasaría con el volumen ocupado por las bacterias si se pudiera seguir observando el proceso "eternamente" y las bacterias se siguieran comportando de la misma forma?*
- *¿Qué habrá pasado mucho antes del comienzo de las observaciones suponiendo que las bacterias siempre se comportaron de la misma manera?*
- *¿En algún momento el volumen ocupado por las bacterias habrá sido o será cero?*





Las preguntas anteriores se refieren a hechos que no se pueden observar ya que pasaron hace mucho tiempo o pasarán dentro de mucho tiempo. Para poder responderlas necesitamos utilizar el modelo matemático que definimos en la Parte D de esta actividad para hacer predicciones sobre lo que podría ocurrir o lo que habrá pasado previamente con el volumen ocupado por las bacterias.

Para responder las preguntas que se hace el investigador, le proponemos que responda las siguientes consignas:

1. Complete la siguiente tabla:

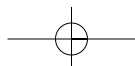
t (tiempo en minutos)	10	30	50	100	300
v (volumen en frascos)					

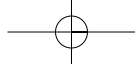
Seguramente al realizar algunos de los cálculos pedidos en la tabla, su calculadora le dio los resultados usando notación científica. Si lo necesita, puede trabajar este tema en los ejercicios de integración de la Unidad 2 de Matemática A.

2. Interprete los resultados obtenidos en la tabla en términos de la situación que estamos analizando.
3. ¿Qué pasaría con el volumen ocupado por la colonia de bacterias si se pudiera seguir observándola "eternamente"?
4. Complete la siguiente tabla:

t (tiempo en minutos)	-10	-30	-50	-100	-300
v (volumen en frascos)					

5. Interprete los resultados obtenidos en la tabla en términos de la situación que estamos analizando.
6. ¿Qué pudo haber pasado con el volumen ocupado por las bacterias mucho tiempo antes de que comenzaran las observaciones?
7. ¿Puede dar algún valor de t para el cual el volumen v ocupado por las bacterias haya sido cero?
8. A partir de la observación de la representación gráfica de la función exponencial y de la tabla que completó en el ítem 4., describa con sus palabras lo que ocurre con dicha gráfica respecto del eje de abscisas (eje horizontal) cuando se va hacia atrás en el tiempo.





ORIENTACIONES

Sobre la función v a partir de observar el gráfico podemos decir que:

Esta función no tiene ceros ya que el volumen ocupado por las bacterias nunca pudo haber sido ni será cero. La representación gráfica de la función no corta al eje de abscisas.

Es una **función creciente** en todo su dominio: el volumen ocupado por las bacterias va aumentando a medida que pasa el tiempo.

Cuando retrocedemos en el tiempo, el volumen ocupado por las bacterias se va acercando a cero. Vemos que la gráfica de la función se acerca al eje horizontal. Decimos que la función tiene una **asíntota horizontal**. En este caso, la ecuación de dicha asíntota es $v = 0$.

Si lo dicho en cuanto a ceros y crecimiento de la función no le resulta familiar, vuelva a trabajar estos contenidos en la Unidad 2 de Matemática C. Si no sabe a qué nos referimos cuando hablamos de asíntotas, trabaje este tema en la Unidad 3 de Matemática B.

Parte F

1. Ahora supongamos que el volumen ocupado por las bacterias se **triplica** minuto a minuto.

a) Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta esta suposición:

t (tiempo en minutos)	0	1	2	3	-1	-2	-3
v (volumen en frascos)							

- b) ¿Qué fórmula permite calcular el volumen v que tiene esta colonia de bacterias de acuerdo con el tiempo transcurrido t ? Escríbala.

c) Defina una función g que describa esta situación.

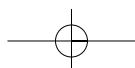
2. Ahora supongamos que el volumen ocupado por las bacterias se **cuadruplica** minuto a minuto.

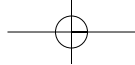
a) Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta esta suposición:

t (tiempo en minutos)	0	1	2	3	-1	-2	-3
v (volumen en frascos)							

- b) ¿Qué fórmula permite calcular el volumen v que tiene esta colonia de bacterias de acuerdo al tiempo transcurrido t ? Escríbala.

c) Defina una función h que describa esta situación.





3. Represente gráficamente las funciones g y h que definió en los ítems 1. y 2. en el mismo sistema de ejes en el que representó la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / v = f(t) = 2^t$.
4. Explique, con sus palabras, lo que observa respecto de la ubicación de los gráficos de las tres funciones representadas.

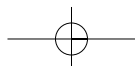
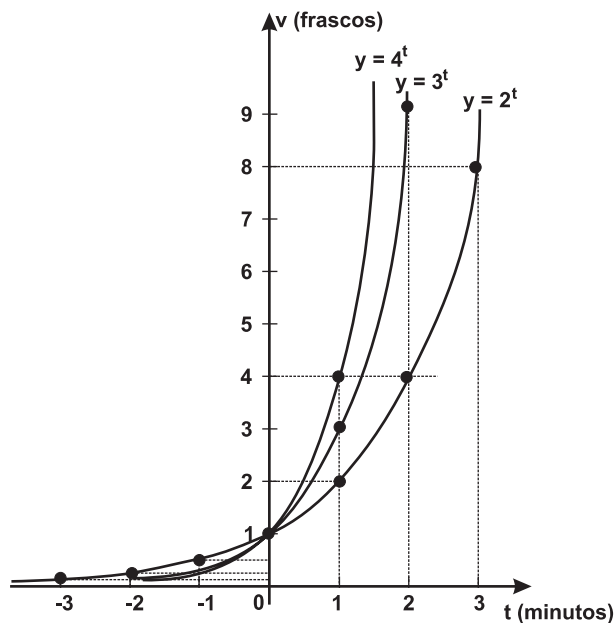
ORIENTACIONES

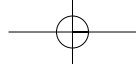
Las funciones que describen las situaciones propuestas en los ítems 1. y 2. de la **Parte F** son:

- $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / g(t) = 3^t$ para el caso de la triplicación de volumen minuto a minuto.
- $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / h(t) = 4^t$ para el caso de la cuadruplicación de volumen minuto a minuto.

Si representamos las funciones exponenciales anteriores y la función exponencial de base 2 en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos, podemos observar que la gráfica de la función exponencial de base 3 queda ubicada entre las gráficas de la función exponencial de base 2 y la de base 4. Además todas son funciones crecientes que crecen más rápido cuanto más grande es la base.

Lo descrito se muestra en el siguiente gráfico:





Parte G

Existe un número irracional que se llama número neperiano y se simboliza con la letra **e**. Este número también puede ser la base de una función exponencial. Por ejemplo,

$$j : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / j(t) = e^t.$$

Teniendo en cuenta que el número **e** está ubicado entre 2 y 3 (el número **e** vale aproximadamente 2,71), represente la función **j** en el mismo sistema de ejes coordenados que usó en la **Parte F**. Si le hace falta, complete previamente una tabla de valores como las que completó para las funciones **f**, **g** y **h**.

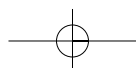
Parte H

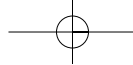
- Vamos a volver ahora al proceso de reproducción de las bacterias de la **Parte A** de esta Actividad. Si lo necesita vuelva a leerla y responda la siguiente pregunta: ¿cuántas etapas del proceso han pasado hasta que se cuentan 64 bacterias? Explique, con sus palabras, cómo piensa para dar su respuesta.
- En un papel que se encontró en el laboratorio se puede leer: $2^{\square} = 64$:
 - ¿Hay alguna relación entre lo escrito en ese papel y lo que tuvo que calcular en el ítem 1.?
 - ¿Qué número pondría en el \square ? Escríbalo.
- Si ahora se cuentan 512 bacterias:
 - ¿Cuántas etapas del proceso de reproducción pasaron?
 - ¿Qué aparecería en el papel encontrado en el laboratorio en este caso? Escríbalo.
 - ¿Qué número va en el \square en este caso?
- Complete la siguiente tabla:

c (cantidad de bacterias)	1	2	8	32	64	512	1024
x (Nº de etapa)							

ORIENTACIONES

En esta **Parte H**, usted calculó cuántas etapas deben transcurrir para observar una determinada cantidad de bacterias. Por ejemplo, para observar 64 bacterias deben pasar 6 etapas del proceso de bipartición. Si para calcular lo pedido, pensamos en la fórmula $c(x) = 2^x$, tuvo que averiguar qué exponente hay que ponerle al número 2 para obtener un determinado resultado (64 ó 512 ó ...).





EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: LOGARITMO EN BASE 2

La operación de averiguar exponentes que hizo en la **Parte H**, se denomina **logaritmación**. Es decir, que ha estado calculando logaritmos. En este caso, se trata de **logaritmos en base 2**, ya que lo que buscamos es el exponente al que hay que elevar a la base 2 para obtener el número dado.

Así, ha calculado, por ejemplo: $\log_2 64$ y le dio **6** (ya que $2^6 = 64$). En símbolos, escribimos $\log_2 64 = 6$.

También ha calculado, entre otros: $\log_2 512 = 9$ (ya que $2^9 = 512$), $\log_2 1 = 0$ (ya que $2^0 = 1$), $\log_2 2 = 1$ (ya que $2^1 = 2$), $\log_2 32 = 5$ (ya que $2^5 = 32$).

En general, decimos que $\log_2 b = c$ si $2^c = b$.

Parte I

Teniendo en cuenta lo dicho en la **Parte D** de esta Actividad sobre el volumen ocupado por las bacterias con el paso del tiempo, responda las siguientes preguntas:

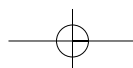
1. ¿En qué instante t se habrá observado un volumen de $\frac{1}{4}$ de frasco?
2. En un papel como el que se encontró en el laboratorio, ¿cómo habrá aparecido anotado lo anterior? ¿Qué número va en el \square ?
3. Si el investigador calcula $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$, ¿cuánto le da? ¿Qué está averiguando respecto del problema del volumen ocupado por las bacterias y el tiempo?

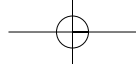
Parte J

En el laboratorio se confeccionó el siguiente cuadro donde se fueron anotando en qué instantes se registraron algunos volúmenes ocupados por las bacterias. Por desperfectos en el equipo de registros el cuadro quedó incompleto:

v (volumen en frascos)	1	2	8	16	1/2	1/4	1/8	1/32
t (tiempo en minutos)	0				-1	-2		

1. Complete el cuadro anterior.
2. Al completar el cuadro:
 - a) ¿Qué cuenta hizo con los valores de v para averiguar cada uno de los valores de t ?
 - b) Escriba la fórmula que permite calcular t a partir de conocer v .
 - c) Compare la tabla anterior con las que completó en la **Parte D** de esta actividad. ¿Qué observa?





Parte K

En la **Parte D**, la fórmula que permite calcular el volumen ocupado por las bacterias a partir del tiempo es $v = 2^t$. En la **Parte J**, la fórmula que permite calcular el tiempo a partir del volumen es $t = \log_2 v$.

1. Componga las fórmulas $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$. Para hacerlo, complete los siguientes esquemas de operadores.

	f		g	
1 →			→
2 →			→
3 →			→
x →			→ g[f(x)] = ...
<hr/>				
	g		f	
8 →			→
4 →			→
2 →			→
x →			→ f[g(x)] = ...

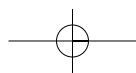
2. De acuerdo con los resultados obtenidos al calcular $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ en el ítem 1., ¿qué puede decir de las fórmulas $f(x)$ y $g(x)$?

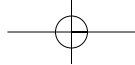
Si no puede obtener las composiciones pedidas o responder la pregunta anterior, retome lo trabajado en la Unidad 2 respecto de la composición de fórmulas.

ORIENTACIONES

Podemos observar que las tablas de la **Parte D** con la tabla de la **Parte J** están invertidas. Es decir que en las tablas de la **Parte D** se forman pares $(t ; v)$, mientras que en la tabla de la **Parte J** se forman pares $(v ; t)$.

También podemos observar en los esquemas de la **Parte K** que el número que se obtiene a la salida de la composición de operadores es el mismo que entró.





Es decir que estas dos fórmulas, $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$ son fórmulas de funciones inversas entre sí ya que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. O sea que se puede escribir que $g(x) = f^{-1}(x)$ o que $f(x) = g^{-1}(x)$.

Es decir que la exponenciación y la logaritmicación son operaciones inversas entre sí.

Parte L

Vuelva a observar el gráfico de la función exponencial $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / v = f(t) = 2^t$ (en la Parte D) y sus respuestas de la Parte E y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el conjunto imagen de dicha función?
2. Si redefinimos la función con el conjunto imagen como conjunto de llegada, ¿cómo clasifica a la función?
3. La relación inversa de la función que redefinimos en el ítem 2., ¿es función? ¿Por qué?
4. Defina la función inversa de la función $v: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{>0} / v(t) = 2^t$ dando su fórmula y sus conjuntos de partida y de llegada.

Con $\mathbf{R}_{>0}$ simbolizamos al conjunto de los números reales mayores que cero.

ORIENTACIONES

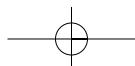
Tomando como conjunto de llegada al conjunto imagen ($\mathbf{R}_{>0}$), la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{>0} / f(x) = 2^x$ es biyectiva. Por lo tanto, existe la función inversa de la función exponencial de base 2 definida con conjunto de partida \mathbf{R} y conjunto de llegada $\mathbf{R}_{>0}$.

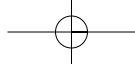
La función inversa de dicha función es la función logarítmica de base 2,

$$t: \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R} / t(v) = \log_2 v$$

Parte M

1. Usando los pares de valores obtenidos en la tabla de la Parte J, represente la función $t: \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R} / t(v) = \log_2 v$.
2. Responda las siguientes preguntas:
 - a) ¿Cuál es el dominio de la función t ?
 - b) ¿Qué interpretación le da al dominio de la función t , teniendo en cuenta el significado de v ?

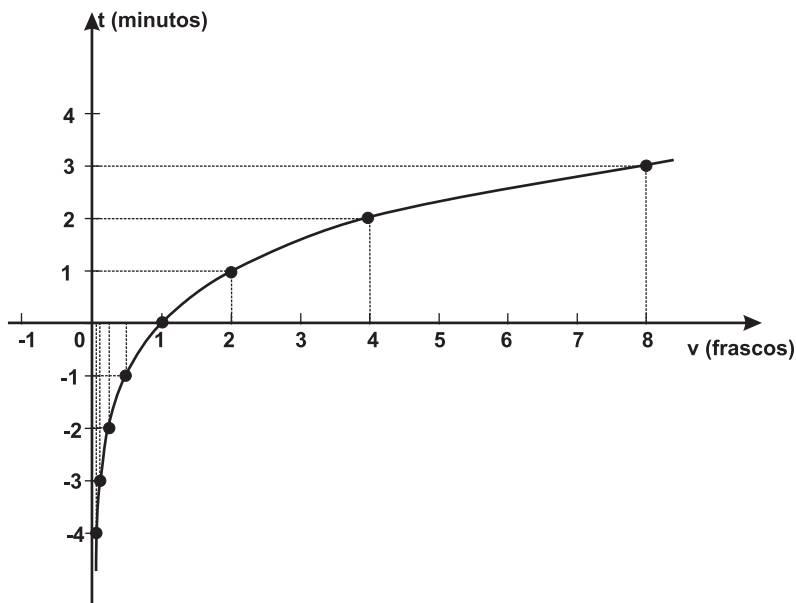




- c) ¿Qué observa en el gráfico respecto de lo que pasa con el tiempo a medida que aumenta el volumen? También puede contestar esta pregunta usando la tabla de la **Parte J**.
- d) ¿Qué observa en el gráfico respecto de lo que pasa con el tiempo cuando el volumen se acerca a 0 frascos? También obsérvelo a partir de los valores obtenidos en la tabla de la **Parte J**.
- e) ¿Qué tipo de comportamiento tiene la gráfica de la función t respecto de la recta que coincide con el eje vertical, es decir, respecto de la recta $v = 0$?
- f) ¿Tiene asíntota este gráfico? Si su respuesta es afirmativa, escriba la ecuación de dicha asíntota. Si su respuesta es negativa, explique el por qué de su decisión.

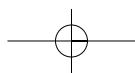
ORIENTACIONES

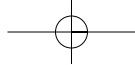
El gráfico de la función $t: \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R} / t(v) = \log_2 v$ es:



Observamos que el gráfico de la función t tiene un cero en $v = 1$, ya que $\log_2 1 = 0$. En términos de la situación que estamos analizando, esto significa que las bacterias ocupaban 1 frasco cuando se consideró $t = 0$.

El dominio de la función es el conjunto de los números reales positivos, ya que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial y el conjunto imagen de esta última es el conjunto de los números reales positivos. Por lo tanto no se puede calcular logaritmos de números negativos ni de cero. Si además tenemos en cuenta la situación del laboratorio, no tiene sentido hablar de que el volumen ocupado por las bacterias sea negativo o cero.





Se puede observar que el gráfico de la función t tiene una asíntota vertical cuya ecuación es $v = 0$ (ya que coincide con el eje de ordenadas). Si pensamos en la situación de las bacterias, podemos interpretar que para que el volumen ocupado sea cercano a cero frascos, deberíamos retroceder infinitamente en el tiempo.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función inversa de la función biyectiva $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{>0} / f(x) = a^x$ es la función $f^{-1}: \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R} / f^{-1}(x) = \log_a x$, donde la base a es un número real positivo ($a > 0$) y distinto de 1 ($a \neq 1$). Esta función se llama **función logarítmica** de base a . Las restricciones sobre el valor que puede tomar la base del logaritmo tienen la misma explicación que las restricciones sobre la base de una función exponencial.

ACTIVIDAD Nº 2: “LA FORTUNA DE MARTÍN”

Martín, un conocido millonario, no está teniendo mucha suerte en sus emprendimientos económicos. Como consecuencia de eso, cada mes tiene la mitad de lo que tenía el mes anterior. A principios de este año, tenía 1 millón de pesos.

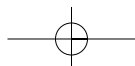
Parte A

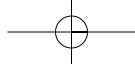
Si tomamos “1 millón de pesos” como unidad de medida y consideramos que el tiempo se mide en meses a partir de principios de este año.

1. Responda las siguientes preguntas:
 - a) ¿Cuántos millones tenía un mes después?
 - b) ¿Cuántos millones tenía 3 meses después?
 - c) ¿Cuántos millones tenía un mes antes?
 - d) ¿Cuántos millones tenía 3 meses antes?
2. Complete la siguiente tabla indicando la evolución del capital que tiene Martín, considerando como $t = 0$ al principio de este año.

t (tiempo en meses)	0	1	2	5	7	-1	-2	-4
C (capital en millones de pesos)	1							

3. ¿Con qué cuenta puede calcular el capital c de Martín en cada instante t ? Escriba la fórmula que indique dicha cuenta.





4. Defina una función que describa lo que ocurre con el capital c de Martín a lo largo del tiempo t .
5. Represente en un sistema de ejes coordenados cartesianos la función que definió en el ítem anterior.
6. Martín se pregunta cómo terminará si sigue así.
 - a) ¿Se quedará sin un centavo?
 - b) ¿Llegará a tener menos de \$ 1?

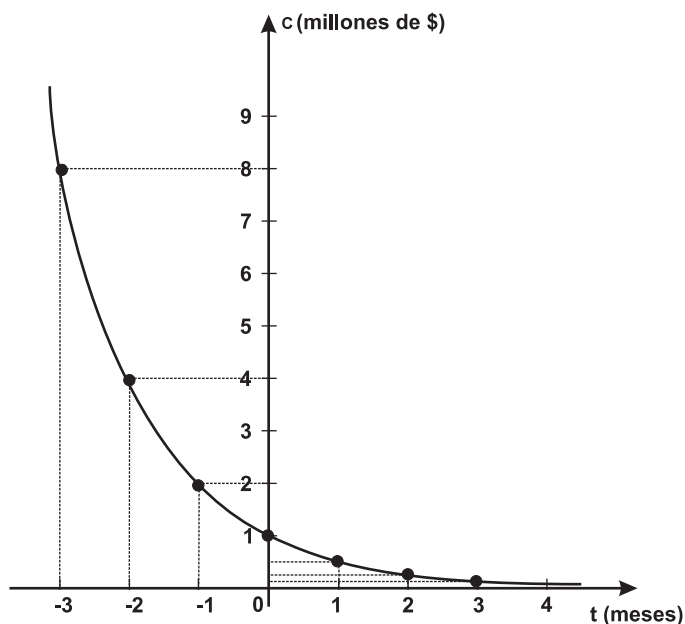
ORIENTACIONES

La fórmula que permite calcular el capital c de Martín a partir del tiempo t es

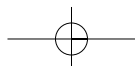
$$c(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

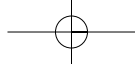
Según lo trabajado hasta ahora podemos decir que es una fórmula exponencial. Una función que puede describir lo que pasa con el capital de Martín es

$c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / c(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$. La representación gráfica de esta función es la siguiente:



Se trata de una función decreciente en todo su dominio que no vale cero para ningún valor de t (es decir que no tiene ceros). A medida que el tiempo t pasa, los valores de c son cada vez más cercanos a cero, pero nunca llegan a anularse. Si observamos la representación gráfica, vemos que la curva se va acercando a la recta horizontal cuya ecuación es $c = 0$ (es decir, el eje de abscisas), que es asíntota horizontal de la función.





Parte B

Responda las siguientes preguntas:

1. Martín está muy preocupado por su situación. Por eso quiere averiguar:
 - a) ¿Después de cuántos meses desde principio de año tendrá $\frac{1}{32}$ millones de pesos?
 - b) ¿Cuántos meses deben pasar desde principio de año hasta tener $\frac{1}{512}$ millones de pesos?
2. A veces, Martín se pone nostálgico y recuerda sus épocas de bonanza.
 - a) ¿Cuándo fue que tenía 16 millones de pesos?
 - b) ¿Y cuándo tenía 128 millones?
3. a) Complete la siguiente tabla:

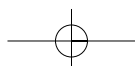
c (capital en millones de \$)	0	1	2	4	8	16	1/2	1/4	1/8	1/32	1/128
t (tiempo en meses)	1										

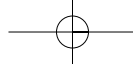
- b) Compare esta tabla con la que completó en la **Parte A** de esta actividad. ¿Qué observa?
4. Teniendo en cuenta los cálculos hechos, lo observado a partir de las tablas y lo analizado en las **Partes H, I y J** de la **Actividad N° 1**, dé la fórmula que permite calcular el tiempo t en el cual Martín tiene un capital c .
5. Teniendo en cuenta lo trabajado en las **Partes K, L y M** de la **Actividad N° 1**, defina la función t que permite describir el tiempo transcurrido para que Martín tenga un determinado capital.
6. Represente en un sistema de ejes coordenados cartesianos la función que definió en el ítem anterior.

ORIENTACIONES

En la **Parte B** trabajó con el problema inverso del que resolvió en la **Parte A**. Es decir, calculó el tiempo a partir de conocer el capital de Martín, en lugar de calcular el capital a partir del tiempo. Si tenemos en cuenta lo trabajado en la **Actividad N° 1 (Partes H, I y J)**, podemos decir que ha estado calculando logaritmos en base $\frac{1}{2}$. Así, por ejemplo, cuando contestó que debieron pasar 5 meses hasta que Martín se quedó con $\frac{1}{32}$ millones de pesos,

$$\text{calculó } \log_{1/2} \left(\frac{1}{32} \right) = 5 \text{ (ya que } \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32} \text{)}.$$

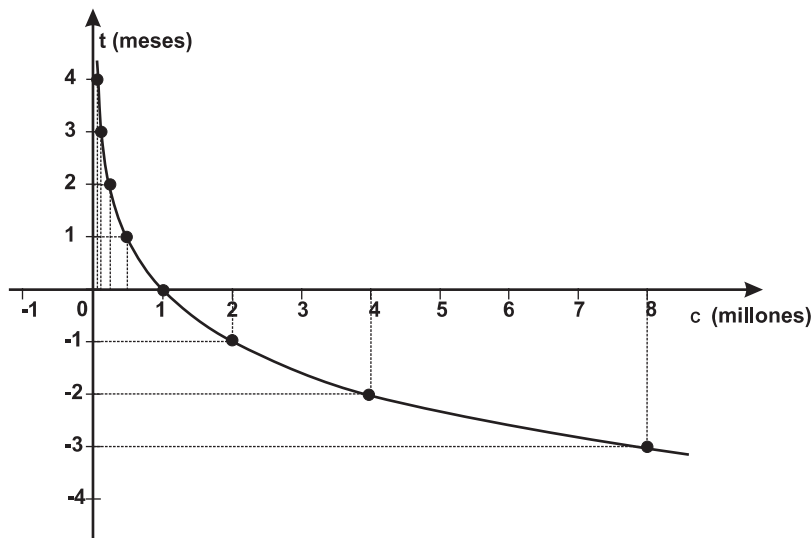




O también calculó $\log_{1/2} 128 = -7$ (ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 128$) para averiguar cuándo Martín tenía 128 millones de pesos.

La función $t: \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R} / t(c) = \log_{1/2} c$ definida en el ítem 5, es la función inversa de $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{>0} / c(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ donde se usa a $\mathbf{R}_{>0}$ como conjunto de llegada para que la función c resulte **biyectiva** y tenga **función inversa**.

La representación gráfica en \mathbf{R}^2 de la función t es la siguiente:



En la gráfica anterior observamos que resulta una función decreciente en todo su dominio. Además tiene una **asíntota vertical** cuya ecuación es $c = 0$ ya que coincide con el eje de ordenadas.

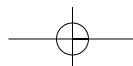
En los ejercicios de integración de esta Unidad tendrá oportunidad de analizar cómo influye la base de las funciones exponenciales y logarítmicas en las características de las mismas y sus respectivos gráficos.

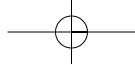
ACTIVIDAD N° 3: "OPERACIONES CON LOGARITMOS"

Hagamos algunas pruebas con el logaritmo en base 2.

Calcule y decida, en cada caso, si puede escribir el signo " $=$ " o el signo " \neq " en los \square :

- $\log_2 8 + \log_2 4$ \square $\log_2 (8 \cdot 4)$
- $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) + \log_2 16$ \square $\log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot 16\right)$
- $\log_2 \left(\frac{1}{4} \cdot 64\right)$ \square $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right) + \log_2 64$





4. $\log_2 32 - \log_2 2$ $\log_2 (32 : 2)$
5. $\log_2 \left(8 : \frac{1}{4} \right)$ $\log_2 8 - \log_2 \left(\frac{1}{4} \right)$
6. $\log_2 (64 : 16)$ $\log_2 64 - \log_2 16$
7. $\log_2 (8^2)$ $2 \cdot \log_2 8$
8. $3 \cdot \log_2 4$ $\log_2 (4^3)$
9. $2 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2} \right)$ $\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2$

ORIENTACIONES

En todos los casos anteriores, el se puede completar con el signo “ = ”.

Las igualdades anteriores son algunos ejemplos de tres propiedades de los logaritmos. En estos ejemplos, se trabajó en base 2, pero se puede generalizar a cualquier base de los logaritmos.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

La propiedad ejemplificada en los ítems **1.**, **2.** y **3.** se simboliza así:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (\text{con } x > 0, y > 0).$$

La propiedad ejemplificada en los ítems **4.**, **5.** y **6.** se simboliza así:

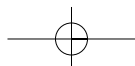
$$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y \quad (\text{con } x > 0, y > 0).$$

La propiedad ejemplificada en los ítems **7.**, **8.** y **9.** se simboliza así:

$$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x \quad (\text{con } x > 0).$$

Esta última propiedad también se utiliza en el caso de la radicación. Si tenemos en cuenta que $\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$ (como vimos en la Unidad N° 1), resulta:

$$\log_a \sqrt[m]{x^n} = \log_a \left(x^{n/m} \right) = \frac{n}{m} \cdot \log_a x.$$



Como ya mencionamos en otras oportunidades, para la Matemática no es suficiente la verificación de propiedades sólo para algunos casos particulares, como hicimos en esta actividad. Para poder afirmarlo de manera general debe demostrar que lo verificado se cumple para cualquier número. Usted podrá leer las demostraciones de estas propiedades en el libro.

ACTIVIDAD N° 4: “DEPÓSITOS BANCARIOS”

Ignacio deposita \$ 500 a principios de enero en una caja de ahorro de un banco. Le dicen que le dan un interés mensual del 2 % sobre el capital depositado. Es decir que al cumplirse un mes del depósito, a éste se le agrega una suma equivalente al 2 % de la cantidad depositada.

Responda las siguientes preguntas:

1. Al mes de haber hecho el depósito,
 - a) ¿Cuánto dinero se agrega al capital depositado?
 - b) ¿Cuánto dinero hay en la cuenta de Ignacio a comienzos de febrero?
2. Ignacio deja todo ese dinero depositado durante otro mes. A principios de marzo,
 - a) ¿Cuánto dinero se agrega a su cuenta?
 - b) ¿Cuánto dinero tiene Ignacio en esa cuenta entonces?
3. Ignacio confía en el banco y deja depositado durante otro mes todo el dinero obtenido hasta el momento. A principios de abril,
 - a) ¿Cuánto dinero se agrega a su cuenta?
 - b) ¿Cuánto dinero tiene Ignacio en dicha cuenta?

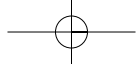
ORIENTACIONES

Desde el punto de vista económico se dice que el depósito de Ignacio fue hecho a **interés compuesto**. Esto significa que el capital depositado cada mes es el capital o monto obtenido al cabo del mes anterior.

Repasemos las cuentas que hizo para contestar las preguntas anteriores para construir una fórmula que permita calcular el capital después de una cantidad de meses de efectuado el depósito.

Para calcular el interés del primer mes, calculamos el **2 % de 500**. Esto es:

$$\frac{2}{100} \cdot 500 = 0,02 \cdot 500 = 10$$



Esta suma se agrega a los \$ 500. Por lo tanto, a fines de Enero tendrá \$ 510 en su cuenta. (¿Coincide con su respuesta?)

También podríamos plantear el cálculo de la cantidad de dinero en la cuenta de Ignacio a fines de Enero del siguiente modo: $500 + 0,02 \cdot 500$.

Como 500 se repite como factor en los dos términos, lo podemos sacar como factor común: $500 \cdot (1 + 0,02) = 510$

Para calcular el interés del segundo mes, calculamos el 2 % de 510. Esto es $0,02 \cdot 510$

Esta suma se agrega a los \$ 510. Esto es:

$510 + 0,02 \cdot 510 = 510 \cdot (1 + 0,02) = 520,2$. (¿Coincide con su resultado?).

Pero, como vimos, $510 = 500 \cdot (1 + 0,02)$. Por lo tanto, podemos escribir la cuenta anterior así:

$$500 \cdot (1 + 0,02) \cdot (1 + 0,02) = 500 \cdot (1 + 0,02)^2 = 520,2$$

Para calcular el interés del tercer mes, calculamos el 2 % de 520,2.

Esto es $0,02 \cdot 520,2$

Esta suma se agrega a los \$ 520,2. Esto es:

$520,2 + 0,02 \cdot 520,2 = 520,2 \cdot (1 + 0,02) = 530,604$ (¿Coincide con su resultado?)

Pero como vimos $500 \cdot (1 + 0,02)^2 = 520,2$. Por lo tanto, podemos escribir la cuenta anterior así:

$$500 \cdot (1 + 0,02)^2 \cdot (1 + 0,02) = 500 \cdot (1 + 0,02)^3$$

Resumiendo los cálculos anteriores para hallar los capitales obtenidos o montos M , teniendo en cuenta el tiempo t (en meses), podemos escribir:

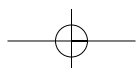
Después de un mes ($t = 1$), resulta: $M(1) = 500 \cdot (1 + 0,02)^1$

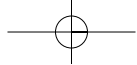
Después de dos meses ($t = 2$), resulta: $M(2) = 500 \cdot (1 + 0,02)^2$

Después de tres meses ($t = 3$), resulta: $M(3) = 500 \cdot (1 + 0,02)^3$

Así podríamos seguir para los demás meses que dure el depósito.

Después de t meses, resulta $M(t) = 500 \cdot (1 + 0,02)^t$. Esta fórmula nos permite calcular el monto de dinero que Ignacio tiene en su cuenta al cabo de t meses después de haber depositado \$ 500 al 2 % mensual.





ACTIVIDAD N° 5: “RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS”

Vamos a retomar las actividades de la Unidad 2 referidas a la composición de funciones. Allí trabajamos con los operadores elementales para “armar” (o componer) fórmulas.

Si le resulta necesario, revea este tema en la Unidad 2.

Parte A

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la fórmula inversa de $f(x) = \log_3 x$?
2. ¿Cuál es la fórmula inversa de $g(x) = x + 1$?
3. ¿Cuál es la fórmula inversa de $h(x) = 2x$?
4. ¿Cuál es la fórmula inversa de $k(x) = 3^x$?
5. ¿Cuál es la fórmula inversa de $n(x) = x - 1$?
6. ¿Cuál es la fórmula inversa de $m(x) = x : 2$?

Parte B

Utilizando las fórmulas dadas en la Parte A:

1. a) Haga la composición $(f \circ g)(x)$. Para hacerla utilice la secuencia de operadores que le damos a continuación y los ejemplos numéricos dados en ellos:

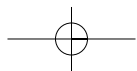
2 →

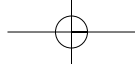
8 →

26 →

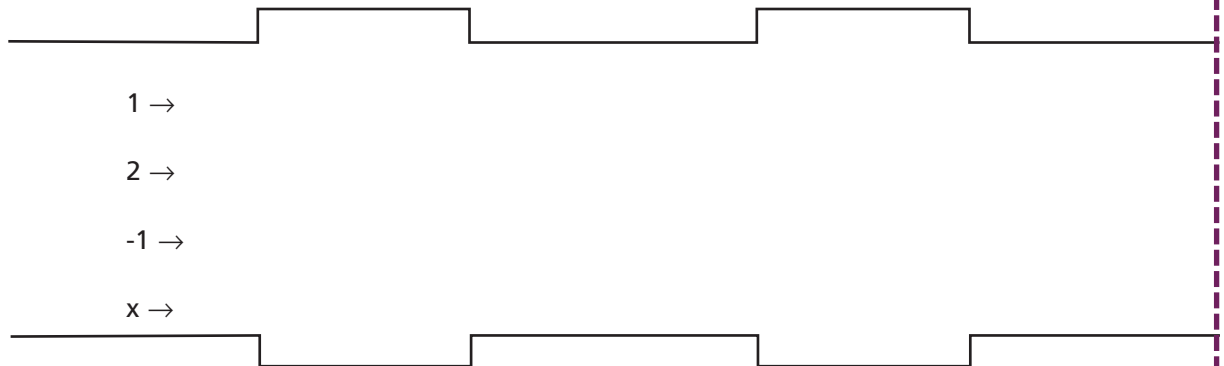
x →

- b) Haga la composición de fórmulas que le permita deshacer lo hecho por el operador compuesto $(f \circ g)(x)$. Pruébela con los números que obtuvo a la salida de $(f \circ g)(x)$.



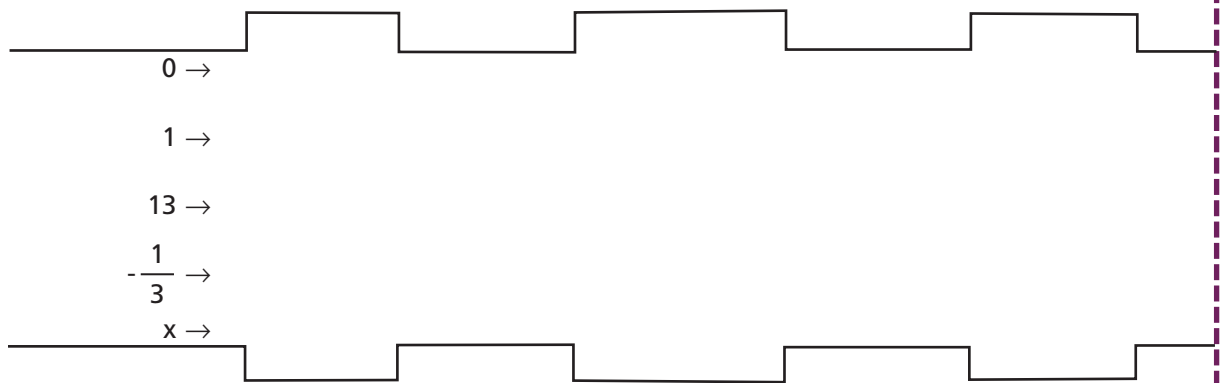


2. a) Haga la composición $(h \circ k)(x)$.



b) Haga la composición de fórmulas que le permita deshacer lo hecho por el operador compuesto $(h \circ k)(x)$. Pruébela con los números que obtuvo a la salida de $(h \circ k)(x)$.

3. a) Haga la composición $(f \circ g \circ h)(x)$.



b) Haga la composición de fórmulas que le permita deshacer lo hecho por el operador compuesto $(f \circ g \circ h)(x)$. Pruébela con los números que obtuvo a la salida de $(f \circ g \circ h)(x)$.

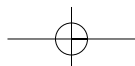
ORIENTACIONES

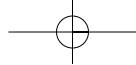
Observamos que los pares de operadores elementales $f(x)$ y $k(x)$; $g(x)$ y $n(x)$; $h(x)$ y $m(x)$ son inversos entre sí.

Es decir que lo que “hace” uno de ellos lo “deshace” el otro.

También podemos ver que si los componemos en un determinado orden, para deshacer la fórmula compuesta que se obtiene aplicamos los operadores inversos en el orden inverso.

Esta operación de armado y desarmado de fórmulas permite resolver ecuaciones, como lo hemos visto en **Matemática A** y **B**.





Parte C

Resuelva las siguientes ecuaciones, escribiendo los operadores que “hacen” y “deshacen”.

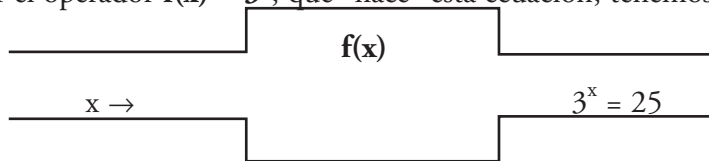
- a) $7 \cdot 2^{x+1} = 3,5$
- b) $\log_4(3 + 2x) = 3$
- c) $5 \cdot e^{2x-1} = 4$ Para resolver esta ecuación tenga en cuenta que la fórmula inversa de $j(x) = e^x$ es $j^{-1}(x) = \ln x$ (que es un logaritmo en base e que leemos logaritmo natural o logaritmo neperiano de x).

Parte D

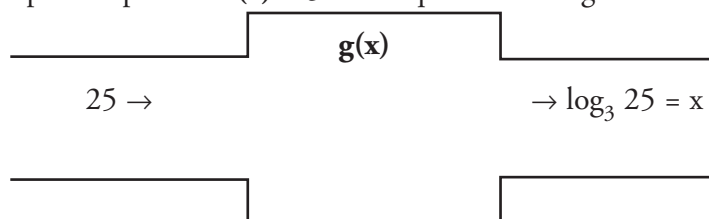
1. Responda la siguiente pregunta sin resolver la ecuación:
¿Entre qué números enteros está el valor de x que verifica la ecuación $3^x = 25$?
2. Resuelva la ecuación dada en el ítem 1.

ORIENTACIONES

Al aplicar el operador $f(x) = 3^x$, que “hace” esta ecuación, tenemos:

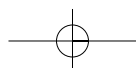


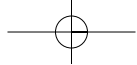
Para resolver la ecuación aplicamos el operador $g(x) = \log_3 x$, que “deshace” lo “hecho” por el operador $f(x) = 3^x$. El esquema es el siguiente:



Nos encontramos con el problema de hallar el $\log_3 25$, que no es calculable mentalmente (sólo podemos saber que está entre 2 y 3). Éste era el problema original ya que hallar el $\log_3 25$ significa encontrar el exponente al que debe elevarse el 3 para obtener 25, que es lo que plantea la ecuación dada.

Uso de calculadora: Para el cálculo de $\log_3 25$, podríamos recurrir a la calculadora científica. Pero nos encontramos con que en la calculadora solo aparecen dos teclas referidas a logaritmos: ellas son la tecla “log” y la tecla “ln”:





- La tecla “log” se refiere a logaritmos decimales o en base 10.
- La tecla “ln” se refiere a logaritmos neperianos o naturales o en base e.

Es decir que la calculadora no tiene una tecla que permita calcular logaritmos en base 3.

Veremos cómo resolver este problema:

Tomemos la ecuación $3^x = 25$.

Apliquemos logaritmos decimales a ambos miembros de la igualdad:

$$\log(3^x) = \log 25$$

Apliquemos la propiedad de logaritmos referida a la potenciación:

$$x \cdot \log 3 = \log 25$$

Despejemos x : $x = \frac{\log 25}{\log 3}$

Calculemos $\log 25$ y $\log 3$ (con la calculadora) y dividamos. Resulta: $x \cong 2,93$.

Obtuvimos un resultado entre 2 y 3 (como esperábamos), que es el valor de

$\log_3 25$. Es decir, que podemos escribir que: $\log_3 25 = \frac{\log 25}{\log 3}$

Curiosidad: Repita el procedimiento anterior aplicando logaritmos naturales (tecla “ln”) y vea qué resulta.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FÓRMULA DE CAMBIO DE BASE

Como vimos, hemos calculado el valor de $\log_3 25$ haciendo el cociente $\frac{\log 25}{\log 3}$.

Esta cuenta nos permitió cambiar la base del logaritmo que teníamos a otra base con la que pudimos usar la calculadora.

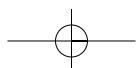
Lo hecho es un ejemplo de la **fórmula de cambio de base**:

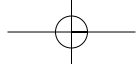
$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

a través de la cual podemos calcular un logaritmo en una base a cualquiera, usando logaritmos decimales.

También podemos escribir una fórmula para calcular logaritmos en cualquier base a usando logaritmos naturales:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$





ACTIVIDAD N° 6: “TRABAJANDO CON EL LIBRO”

En esta actividad lo orientaremos para que trabaje utilizando el libro temático 2: *Funciones 2 de Altman, S. y otros, editorial Longseller.*



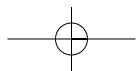
El abordaje de estos temas se realizará únicamente en base a la lectura y la resolución de las actividades que le indicaremos en los siguientes párrafos.

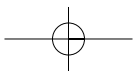
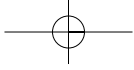
En el capítulo 3 - Funciones y ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

1. Lea la presentación en la página 57.
2. Resuelva los Problemas 1, 2 y 3 planteados en la página 58.
3. Lea la resolución del Problema 1 en la página 59.
4. Lea las Propiedades y la resolución del Problema 2 en la página 61.
5. Lea la resolución del Problema 3 en la página 62.
6. Resuelva los ejercicios 3, 4 y 5 del recuadro de la derecha de la página 61.
7. Resuelva los ejercicios 6, 7 y 8 del recuadro de la izquierda de la página 62.
8. Lea la Conclusión y la Propiedad en la página 62 y comienzo de la página 63.
9. Resuelva el ejercicio 11 del recuadro de la derecha de la página 63.
10. Resuelva los Problemas 4 y 5 planteados en la página 63.
11. Lea la resolución de los Problemas 4 y 5 en las páginas 63 y 64.
12. Lea las páginas 65, 66 y 67: Logaritmos y Propiedades.
13. Resuelva los ejercicios 12, 13 y 14 del recuadro de la derecha de la página 65.
14. Resuelva el ejercicio 15 del recuadro de la izquierda de la página 66.
15. Lea las páginas 69, 70 y 71 desde el título “Ecuaciones exponenciales y logarítmicas” hasta donde dice “ $x = 5$ ” en la página 71. No lea a partir de donde dice “Para resolver la ecuación planteada en e.”
16. Resuelva el ejercicio 22 del recuadro de los márgenes izquierdo y derecho de las páginas 70 y 71.
17. Resuelva los ejercicios 4, 8, 11, 12 y 20 (solo los ítems b, f, g, h, i) de las páginas 74, 75, 77 y 78.

Antes de comenzar a estudiar la próxima unidad, usted debe realizar los ejercicios de integración correspondientes a la Unidad 3.

¡No deje de realizarlos!





Funciones trigonométricas

En esta unidad retomaremos la idea de semejanza de triángulos trabajada en Matemática B para introducir el concepto de razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Usaremos esas razones para calcular las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.

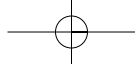
Además ampliaremos el uso de las razones trigonométricas a ángulos no agudos y definiremos las funciones trigonométricas seno y coseno. Veremos las representaciones gráficas de estas dos funciones y estudiaremos sus principales características.

Propósitos de la unidad

En relación con los contenidos de esta unidad le proponemos que:

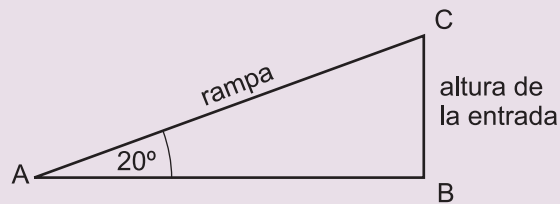
- Reconozca las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Utilice dichas razones para calcular las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.
- Resuelva situaciones problemáticas utilizando razones y ecuaciones trigonométricas.
- Utilice el sistema circular de medición de ángulos.
- Represente las funciones trigonométricas seno y coseno en un sistema de ejes coordenados cartesianos.
- Analice funciones trigonométricas.
- Resuelva ecuaciones trigonométricas.
- Utilice el teorema del seno y el teorema del coseno para calcular las medidas de los ángulos y los lados de triángulos oblicuángulos.
- Verifique algunas identidades trigonométricas.

Para trabajar con las siguientes actividades, debe tener en cuenta las condiciones de semejanza entre figuras. Si no tiene claro este tema, trabájelo en la Unidad 4 de Matemática B antes de comenzar a resolver las actividades planteadas a continuación.

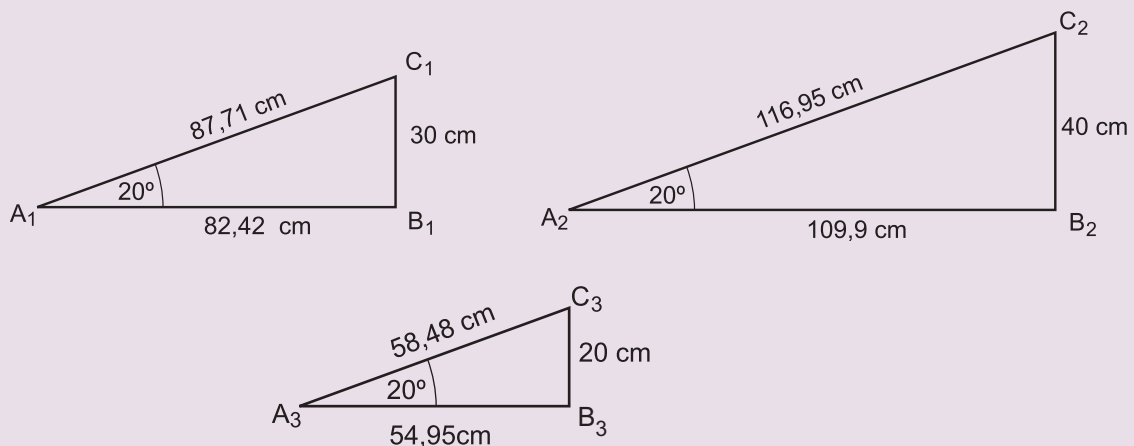


ACTIVIDAD N° 1: “RAMPAS DE ACCESO”

Una empresa fue contratada para colocar rampas de acceso a varios edificios. Las entradas de dichos edificios están a diferentes alturas respecto del nivel de la vereda. Por contrato, el ángulo que forma la rampa con respecto a la vereda (horizontal) es de 20° . Lo descrito puede esquematizarse de la siguiente manera:



A continuación se representan varias posibles rampas de acceso con sus respectivas medidas, construidas de acuerdo con las condiciones dadas:

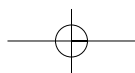


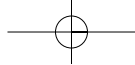
Parte A

Recuerde que los triángulos se clasifican según sus ángulos en: *acutángulos*, *rectángulos* y *obtusángulos*. Si lo necesita puede revisar el tema en la *Unidad 5 de Matemática A*.

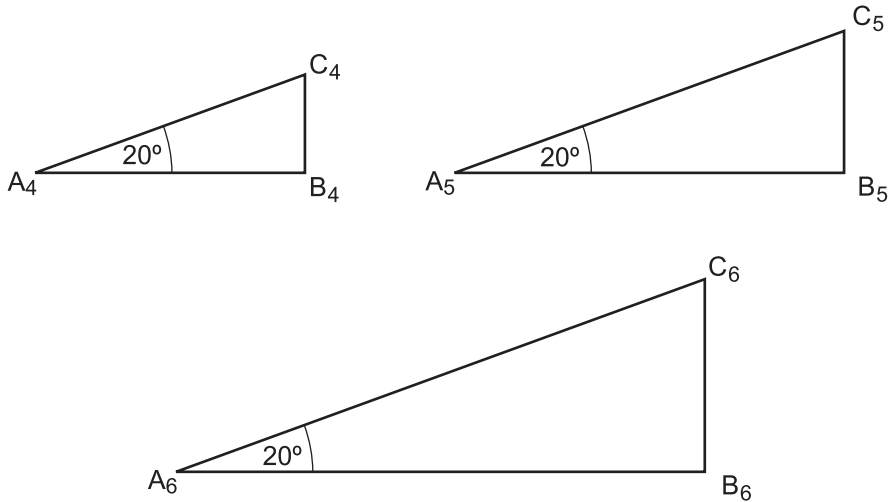
1. Responda las siguientes preguntas:

- Teniendo en cuenta esta clasificación, ¿qué tipo de triángulos son los representados arriba?
- Teniendo en cuenta lo trabajado en la **Unidad 4 de Matemática B**: ¿cómo son entre sí las medidas de los lados correspondientes de los tres triángulos representados? ¿Cómo son entre sí las medidas de los ángulos correspondientes de los tres triángulos representados?





- c) En consecuencia, ¿cómo son entre sí los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$?
- d) Teniendo en cuenta sus respuestas a los ítems b) y c), ¿cómo será cualquier triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 20° , respecto de los anteriores?
- e) Los triángulos $A_4B_4C_4$, $A_5B_5C_5$ y $A_6B_6C_6$ dibujados a continuación representan otras posibles rampas con las condiciones dadas:



Teniendo en cuenta lo que respondió en el ítem d), complete las siguientes proporciones entre las alturas de entrada a los edificios y las longitudes de rampa:

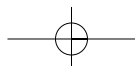
$$\frac{|B_4C_4|}{|A_4C_4|} = \frac{|B_5C_5|}{\dots\dots\dots} \quad \frac{|B_4C_4|}{\dots\dots\dots} = \frac{|B_6C_6|}{\dots\dots\dots} \quad \frac{|B_5C_5|}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{|A_6C_6|}$$

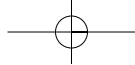
- Se calculó que en un edificio cuya entrada tiene 10 cm de altura, la rampa de acceso mide 29,24 cm aproximadamente. En otro edificio se sabe que la altura de la entrada es de 15 cm, ¿cuál será la medida de la rampa? Responda teniendo en cuenta las proporciones planteadas en el ítem e).
- El encargado de la empresa quiere tabular posibles alturas de edificios y las medidas de sus respectivas rampas. Suponga que usted es empleado de esta empresa y le solicitan el trabajo.

Complete la siguiente tabla:

Altura de la entrada del edificio (en cm)	10	15	22	25	35
Medida de la rampa (en cm)	29,24	43,85			

- ¿Cuánto vale en cada caso el cociente entre la altura de la entrada al edificio y el largo de la rampa? Realice el cálculo utilizando 2 decimales.





ORIENTACIONES

Los triángulos que representan a las rampas de acceso a los edificios son triángulos rectángulos. En ellos, la altura de la entrada al edificio es uno de sus catetos y la rampa es la hipotenusa. Al cateto que representa la altura de la entrada al edificio lo llamamos **cateto opuesto al ángulo de 20°** por su ubicación respecto del ángulo de 20°.

Parte B

Responda las siguientes preguntas:

1. En los triángulos dados, ¿cuánto valen los cocientes o razones:

$$\frac{\text{medida del cateto opuesto al ángulo } 20^\circ}{\text{medida de la hipotenusa}} \quad ?$$

2. Si consideramos otros triángulos semejantes a los dados, ¿cuánto valen los cocientes o razones:

$$\frac{\text{medida del cateto opuesto al ángulo } 20^\circ}{\text{medida de la hipotenusa}} \quad ?$$

ORIENTACIONES

Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo de 20° son semejantes entre sí. Por lo tanto, los cocientes (o razones) entre la medida del cateto opuesto al ángulo de 20° y la medida de la hipotenusa valen lo mismo para cualquiera de esos triángulos. Es decir que:

$$\frac{\text{medida del cateto opuesto al ángulo } 20^\circ}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

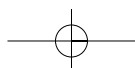
es un valor constante.

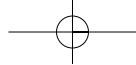
Esta constante es una **razón trigonométrica** que recibe el nombre de seno de 20°. Simbólicamente lo escribimos **sen 20°**. O sea que:

$$\text{sen } 20^\circ = \frac{\text{medida del cateto opuesto al ángulo } 20^\circ}{\text{medida de la hipotenusa}} = 0,34$$



Uso de calculadora: Podemos averiguar el valor de $\text{sen } 20^\circ$ con la calculadora científica utilizando la tecla SIN. En esta actividad trabajaremos con ángulos medidos en grados sexagesimales. Por eso, debe usar su calculadora en MODE DEG (verifique que en la pantalla aparezca una letra D o la abreviatura DEG).





Parte C

Verifique, utilizando su calculadora, que los cocientes que calculó en la **Parte B** coincidan con el valor de **sen 20°** (aproximadamente).

Parte D

Responda las siguientes consignas:

1. Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos dados complete las siguientes proporciones:

a)

$$\frac{|A_4B_4|}{|A_4C_4|} = \frac{|A_5B_5|}{\dots\dots\dots}$$

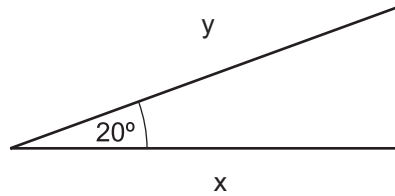
b)

$$\frac{|A_4B_4|}{\dots\dots\dots} = \frac{|A_6B_6|}{|A_6C_6|}$$

c)

$$\frac{\dots\dots\dots}{|A_5C_5|} = \frac{|A_6B_6|}{|A_6C_6|}$$

2. El encargado de la empresa quiere confeccionar una nueva tabla con los valores de **x** e **y**, siendo **x** la distancia entre el punto de apoyo de la rampa en la vereda y la base del escalón; e **y** el largo de la rampa. En el esquema que sigue se indican los lados del triángulo designados como **x** e **y**.

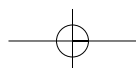


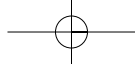
Complete la tabla:

x (en cm)	80	60	90	100
y (en cm)	85,13			

ORIENTACIONES

El lado del triángulo rectángulo que representa la distancia entre el punto de apoyo de la rampa en la vereda y la base del escalón, por su ubicación respecto del ángulo de 20°, se llama **cateto adyacente al ángulo de 20°**.





Parte E

Calcule los cocientes o razones:

$$\frac{\text{medida del cateto adyacente al ángulo } 20^\circ}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

utilizando cada uno de los valores de la tabla de la **Parte D**.

ORIENTACIONES

Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo de 20° son semejantes entre sí. Por eso todos los cocientes o razones:

$$\frac{\text{medida del cateto adyacente al ángulo } 20^\circ}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

valen lo mismo. Su valor aproximado es de 0,94.

Esta constante es otra razón trigonométrica que recibe el nombre de **coseno del ángulo de 20°** . Simbólicamente es **cos 20°** .

Resulta entonces que:

$$\cos 20^\circ = \frac{\text{medida del cateto adyacente al ángulo } 20^\circ}{\text{medida de la hipotenusa}} = 0,94$$



Uso de calculadora: También puede calcular este valor con la calculadora científica, usando la tecla COS.

Parte F

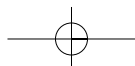
Verifique, usando su calculadora, que los cocientes calculados en la **Parte E** coinciden todos con el valor de **cos 20°** .

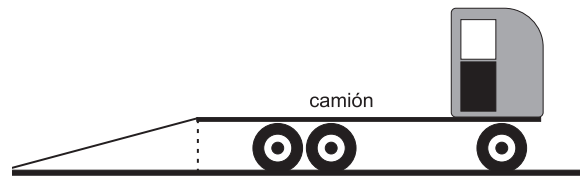
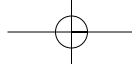
ACTIVIDAD N° 2: “RAMPAS PARA CARGA Y DESCARGA”

Otra empresa es contratada para fabricar rampas de carga y descarga de camiones de transporte de mercaderías. El ángulo que debe formar cada rampa con el piso (horizontal) es de 30° . El gerente de producción de la empresa quiere prever los largos de las rampas de acuerdo con las distintas alturas de los camiones.

Parte A

1. En el siguiente esquema, ubique el lado del triángulo que representa a la altura del camión, el que representa a la rampa y el que representa al piso. Indique también el ángulo de 30° .





2. Responda las siguientes preguntas:

a) Teniendo en cuenta las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo de 30° , ¿cuál de ellas corresponde al cociente entre la altura del camión (cateto opuesto al ángulo de 30°) y el largo de la rampa (hipotenusa del triángulo)?

b) ¿Cuánto vale dicho cociente? Complete la siguiente igualdad usando ese valor:

$$\dots\dots\dots = \frac{\text{altura del camión}}{\text{largo de la rampa}}$$

c) Se sabe que la altura de un camión es de 0,6 m. Utilice la igualdad que planteó en el ítem b) para calcular el largo de la rampa que debe prever el gerente.

ORIENTACIONES

Si tenemos en cuenta que: $\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{altura del camión}}{\text{largo de la rampa}}$ y llamamos **x** al

largo de la rampa, podemos escribir: $\text{sen } 30^\circ = \frac{0,60 \text{ m}}{x}$.

Como $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ (verifíquelo con su calculadora) resulta la ecuación

$$0,5 = \frac{0,60 \text{ m}}{x}$$

De allí despejamos el valor de **x**:

$$0,5 \cdot x = 0,6$$

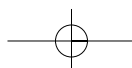
$$x = 0,6 : 0,5 = 1,2 \text{ m (que es el largo de la rampa)}$$

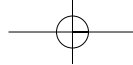
Parte B

En el depósito de la empresa quedó una rampa que mide 2 m de largo.

Responda las siguientes preguntas:

1. El gerente quiere averiguar cuál debería ser la altura del camión para el que podría servirle la rampa disponible.





- a) ¿Qué igualdad o ecuación puede plantear que le permita averiguarlo?
- b) Calcule la altura de ese camión.
2. ¿A qué distancia del camión apoya la rampa sobre el piso? Para calcularla, plantee y resuelva la ecuación que le permite calcular lo pedido.

ORIENTACIONES

Podemos averiguar cuál es la altura del camión a partir de la ecuación:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{2 \text{ m}}, \text{ siendo } x \text{ la altura del camión.}$$

Si despejamos el valor de x , resulta: $x = \text{sen } 30^\circ \cdot 2 \text{ m} = 0,5 \cdot 2 \text{ m} = 1 \text{ m}$.

A partir de la ecuación: $\text{cos } 30^\circ = \frac{z}{2 \text{ m}}$, podemos averiguar la distancia z que hay desde el camión hasta el punto de apoyo de la rampa sobre la calle.

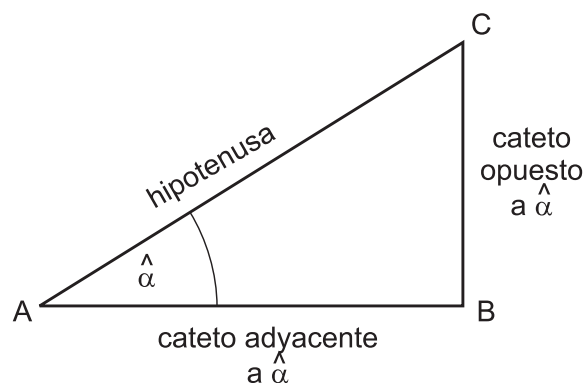
Despejando resulta: $z = \text{cos } 30^\circ \cdot 2 \text{ m} = 0,86 \cdot 2 \text{ m} = 1,72 \text{ m}$.

Observamos entonces que, el $\text{sen } 30^\circ$ nos permite hallar la medida de la hipotenusa del triángulo si conocemos la medida del cateto opuesto al ángulo de 30° . También nos permite hallar la medida del cateto opuesto al ángulo de 30° si sabemos cuánto mide la hipotenusa.

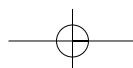
Por otro lado, el $\text{cos } 30^\circ$, nos permite hallar la medida de la hipotenusa del triángulo si conocemos la medida del cateto adyacente al ángulo de 30° . También nos permite hallar la medida del cateto adyacente al ángulo de 30° si conocemos cuánto mide la hipotenusa.

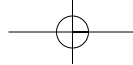
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En las actividades anteriores hemos trabajado con razones (o cocientes) trigonométricas que se dan en triángulos rectángulos. Las hemos llamado seno y coseno de un ángulo.

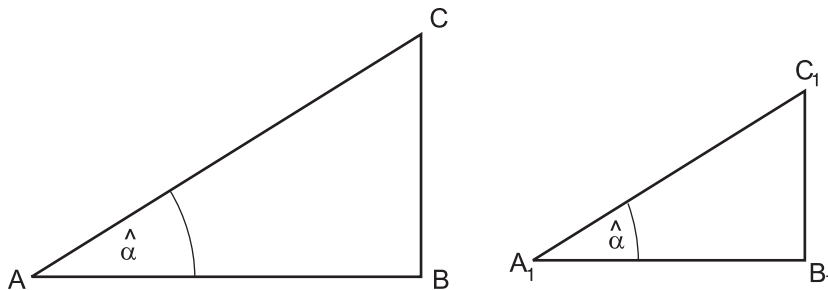


En el esquema de la izquierda le mostramos un triángulo rectángulo **ABC** cualquiera, en el que destacamos un ángulo α (no recto) y los nombres de los catetos del triángulo en relación con ese ángulo.





Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo de medida α son semejantes entre sí. Por ejemplo, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes.



Por lo tanto, podemos afirmar que la razón (o cociente) entre la medida del cateto opuesto al ángulo α y la medida de la hipotenusa, es constante. A dicha constante la llamamos **seno del ángulo** $\hat{\alpha}$, y la simbolizamos **sen** $\hat{\alpha}$. Entonces definimos:

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

También es constante la razón (o cociente) entre la medida del cateto adyacente al ángulo α y la medida de la hipotenusa. A dicha constante la llamamos **coseno del ángulo** $\hat{\alpha}$ y la simbolizamos **cos** $\hat{\alpha}$. Definimos:

$$\text{cos } \hat{\alpha} = \frac{\text{medida del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

De manera similar a lo visto para **sen** $\hat{\alpha}$ y **cos** $\hat{\alpha}$, podemos definir otra razón trigonométrica llamada **tangente de** $\hat{\alpha}$. Definimos:

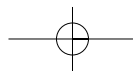
$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{medida del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}$$

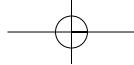
Los valores **sen** $\hat{\alpha}$, **cos** $\hat{\alpha}$ y **tg** $\hat{\alpha}$, para los distintos ángulos α posibles, se pueden determinar con la calculadora científica.

Parte C

Quedó otra rampa en el depósito. Mide 2,5 metros de largo. La compran para la carga y la descarga de un camión que mide 0,9 metros de altura. Por razones de seguridad, hay una reglamentación para el uso de estas rampas que establece que el ángulo que forma la rampa con el suelo no puede ser mayor a 31° .

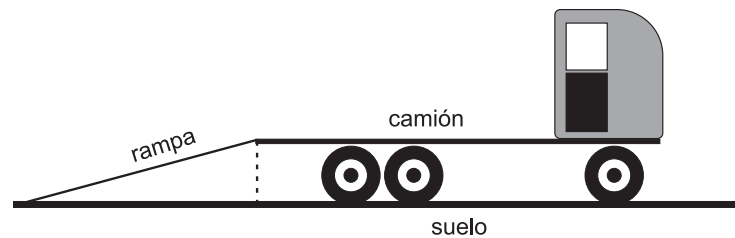
Se quiere averiguar si se puede usar esta rampa sin cometer una infracción a la reglamentación. Es decir, se quiere averiguar cuánto mide el ángulo que forma la rampa con el suelo.





Teniendo en cuenta la información anterior, responda las siguientes consignas:

1. Ubique los datos y la incógnita en un esquema como el siguiente:



2. Respecto del ángulo α que se quiere averiguar, ¿qué lugar ocupan los lados del triángulo que son datos?
3. ¿Con qué razón trigonométrica podría vincular los datos con la incógnita? Plantee la igualdad que le permita averiguar el valor de dicha incógnita.
4. Determine, en forma aproximada, la medida del ángulo α utilizando su calculadora. Tenga en cuenta los valores $\text{sen } 20^\circ$ y $\text{sen } 30^\circ$ calculados anteriormente.

ORIENTACIONES

Del triángulo rectángulo formado por la altura del camión, la rampa y el suelo, tenemos las medidas del cateto opuesto al ángulo α y de la hipotenusa.

Podemos plantear entonces la siguiente igualdad: $\text{sen } \alpha = \frac{0,9}{2,5} = 0,36$

Teniendo en cuenta que $\text{sen } 21^\circ \cong 0,358$ y $\text{sen } 22^\circ \cong 0,374$, podemos estimar que $\hat{\alpha}$ mide algo más de 21° .



Uso de calculadora: Podemos calcular cuánto mide α usando la calculadora científica (en MODE DEG). Observe en su calculadora que sobre la tecla SIN aparece SIN^{-1} , que es la operación que permite hallar la medida del ángulo si se sabe el valor del seno del mismo. Para utilizar la tecla SIN^{-1} debe apretar, previamente, la tecla SHIFT o INV. Realizando dicho cálculo resulta $\alpha \cong 21,1^\circ = 21^\circ 6'$. También si se sabe el valor del coseno de un ángulo o de la tangente de un ángulo, se puede averiguar la medida de ese ángulo usando COS^{-1} o TAN^{-1} en su calculadora.

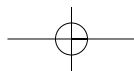
ACTIVIDAD N° 3: “TRABAJANDO CON EL LIBRO”

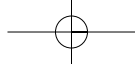


En esta actividad lo orientaremos para que trabaje utilizando el libro temático 2: Funciones 2 de Altman, S. y otros, editorial Longseller.

Realizaremos el abordaje de estos temas únicamente en base a la lectura y la resolución de las actividades que le indicaremos en los siguientes párrafos.

Le indicaremos paso a paso el camino que debe seguir.





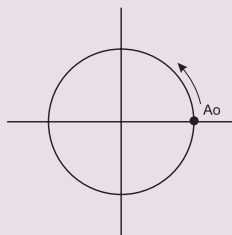
En el capítulo 4 - Funciones y ecuaciones trigonométricas:

1. Lea la presentación del capítulo en la página 81.
2. Resuelva el problema 1 propuesto en la página 82.
3. Lea la resolución del problema 1 en la página 84.
4. Resuelva los problemas 2 y 3 en la página 85.
5. Lea la resolución de los problemas 2 y 3 en las páginas 86 y 87.
6. Resuelva el ejercicio 1 propuesto en el recuadro de la derecha de la página 85.
7. Resuelva los ejercicios 2 y 4 propuestos en el recuadro izquierdo de la página 86.
8. Lea el "Teorema del seno" en la página 88 y comienzo de la página 89.
9. Resuelva los ejercicios 5, 6 y 7 propuestos en el recuadro izquierdo de la página 88.
10. Resuelva los ejercicios 8 y 9 propuestos en el recuadro de la derecha de la página 89.
11. Lea el problema 4 y su resolución en las páginas 91 y 92.
12. Lea el "Teorema del coseno" en la página 92 y comienzo de la página 93.
13. Resuelva los ejercicios 14 y 15 propuestos en el recuadro izquierdo de la página 92.
14. Resuelva los ejercicios 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 de la Guía de ejercitación propuesta en las páginas 101 a 104.

ACTIVIDAD N° 4: "UN JUEGO PARA COMPUTADORAS"

La empresa Ko-Mun ha ideado el siguiente juego para computadoras.

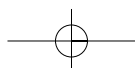
En la pantalla de la computadora aparece una circunferencia (como la dibujada abajo) sobre la que gira un satélite artificial del enemigo en el sentido que indica la flecha.

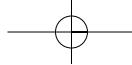


La posición inicial del satélite es A_0 indicada en el dibujo y gira en sentido "contrario a las agujas del reloj".

A través del teclado se puede dar una orden para atacar al satélite.

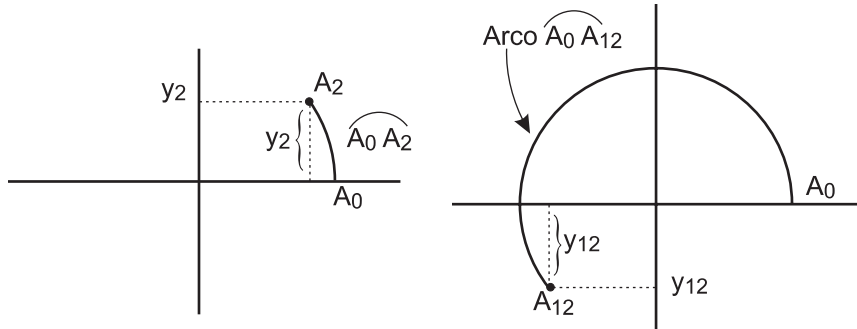
En este juego hay que actuar con cuidado para obtener un buen puntaje. Cada vez que la orden de ataque tenga éxito, es decir que toque al satélite, se obtiene un puntaje que puede ser positivo o negativo según el lugar de la circunferencia donde se encuentre el satélite en el momento del impacto. La orden de ataque que debe dar es la longitud del arco de circunferencia que ha recorrido el satélite desde su posición inicial A_0 .





Parte A

Veamos cómo se asignan los puntajes. Para ello, le damos los siguientes dibujos correspondientes a dos jugadas:



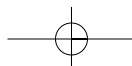
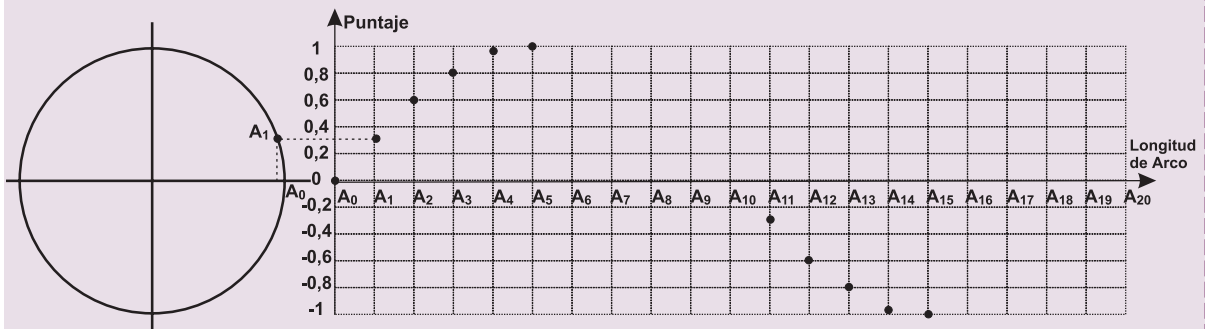
Responda las siguientes preguntas a partir de la observación de los dibujos anteriores:

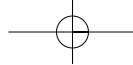
1. Por ejemplo, si usted dio como orden o instrucción la longitud del arco A_0A_2 y el satélite está en el punto A_2 , entonces es impactado por el disparo. En ese caso, el puntaje asignado es el de la ordenada y_2 del punto A_2 .
¿Qué signo tendrá el puntaje obtenido en este caso?
2. Otro ejemplo: Si el satélite ha recorrido el arco A_0A_{12} hasta el momento del impacto, tiene un puntaje equivalente a la ordenada y_{12} del punto A_{12} .
¿Qué signo tendrá el puntaje obtenido en este caso?

Parte B

La computadora indica en la parte superior de la pantalla el puntaje cuando se produce el impacto. Pero también, si el jugador lo solicita muestra un gráfico que expresa "el puntaje correspondiente a cada longitud de arco recorrido por el satélite desde A_0 hasta la posición del impacto".

Por un desperfecto en la computadora, al pedir este gráfico, el mismo se está mostrando incompleto. Tendrá que completarlo usted. Vayamos viendo de qué se trata con la ayuda del siguiente gráfico:



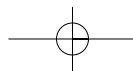


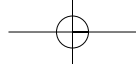
Responda las siguientes preguntas a partir de la observación del gráfico:

1. Si el satélite recorre el arco A_0A_1 y es tocado en A_1 :
 - a) ¿Cuál es, aproximadamente, el puntaje obtenido?
 - b) ¿Dónde puede leerse?
2. ¿Dónde está ubicado el punto A_5 en la circunferencia? Es decir, ¿cuál es el arco $\widehat{A_0A_5}$ en la circunferencia? Sugerencia: Tome un hilo o piolín y mida con él el segmento $\overline{A_0A_5}$ en el gráfico de los puntajes. Después ponga un extremo del hilo en A_0 y extiéndalo sobre la circunferencia. Encuentre así el punto A_5 sobre la circunferencia.
3. ¿Qué puntaje le corresponde al jugador si el satélite fue alcanzado por un disparo cuando recorre una longitud igual a la del segmento $\overline{A_0A_5}$ a partir del punto inicial A_0 de la circunferencia? ¿Qué tiene en cuenta para responder a partir de la circunferencia? ¿Y para responder a partir del gráfico de los puntajes?
4. a) Siga midiendo con el hilo y marque los puntos $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{19}, A_{20}$ en la circunferencia.
 - b) Complete el gráfico de puntajes. Para eso considere los puntajes que se obtienen al acertar al satélite en esos puntos de la circunferencia.
 - c) ¿Qué puntaje obtendrá, aproximadamente, si le acierta al satélite en cada uno de los puntos que marcó en el ítem a)?
5. a) Ahora piense en todos los puntos que hay entre A_0 y A_1 en la circunferencia.
 - ¿Cuántos son? ¿Entre qué valores estarán los puntajes asociados con ellos?
 - b) ¿Y si se consideran todos los puntos entre A_1 y A_2 ? ¿Cuántos son y entre qué valores estarán los puntajes asociados con ellos?
 - c) ¿Y si se consideran todos los puntos entre A_2 y A_3 ?
 - d) ¿Hay algún punto de la circunferencia para el cual no se obtenga puntaje? (Aclaración: Esto no quiere decir que el puntaje sea cero).
6. Teniendo en cuenta lo que contestó en el ítem 5., complete el gráfico de los puntajes indicando en él los puntajes correspondientes a todas las longitudes de arco posibles de ser recorridas por el satélite.
7. Usted tiene que pensar una estrategia para este juego. Tenga en cuenta que para acertar el ataque, en la orden dada a la máquina se debe indicar exactamente la longitud de arco recorrida por el satélite.

En los casos en que se acierte con el disparo:

 - a) ¿Con qué orden (o sea, con qué longitud de arco) obtendría el mejor puntaje?
 - b) ¿Qué orden le daría a la máquina para que su puntaje no se altere? (O sea, que el puntaje de ese disparo sea cero).





- c) ¿Qué orden no le conviene dar porque le otorgaría el peor puntaje?
 - d) ¿Qué órdenes dadas a la computadora le darían puntajes positivos?
 - e) ¿Qué órdenes restarían puntaje a lo obtenido anteriormente (es decir, le darían puntajes negativos)?
8. ¿Cómo es la longitud de la circunferencia con respecto a la del segmento $\overline{A_0A_{20}}$ del gráfico? (Compruébelo midiendo con el hilo).
9. La longitud L de una circunferencia cuyo radio es r se calcula utilizando la fórmula $L = 2\pi \cdot r$ (o lo que es lo mismo “ 2π veces el radio”). Si usáramos el radio como unidad de medida, o sea que $r = 1$, ¿qué longitud tiene la circunferencia? Por lo tanto, ¿qué longitud tiene el segmento $\overline{A_0A_{20}}$ del gráfico?
10. ¿Cuántos grados mide el ángulo abarcado al dar una vuelta completa a la circunferencia?

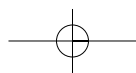
ORIENTACIONES

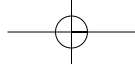
El segmento $\overline{A_0A_{20}}$ mide $2\pi \cdot \text{radio}$ (es decir que mide “ 2π veces la unidad de radio”). Como estamos usando el radio como unidad de medida decimos que mide 2π radianes (ó **2π rad**). También podemos decir que al dar una vuelta completa a esta circunferencia se recorre un arco de 2π radianes. El ángulo abarcado al dar una vuelta completa a la circunferencia mide 360° . Por lo tanto, podemos establecer una equivalencia entre arcos y ángulos: un arco de 2π radianes equivale a 360° .

Parte C

1. Indique en la escala del eje de abscisas (longitudes de arco) del gráfico correspondiente a los puntajes, la longitud de cada uno de los arcos considerados. Para ello, complete la siguiente tabla indicando las longitudes de los arcos en radianes. Le damos algunos ejemplos (usando $\pi \cong 3,14$):

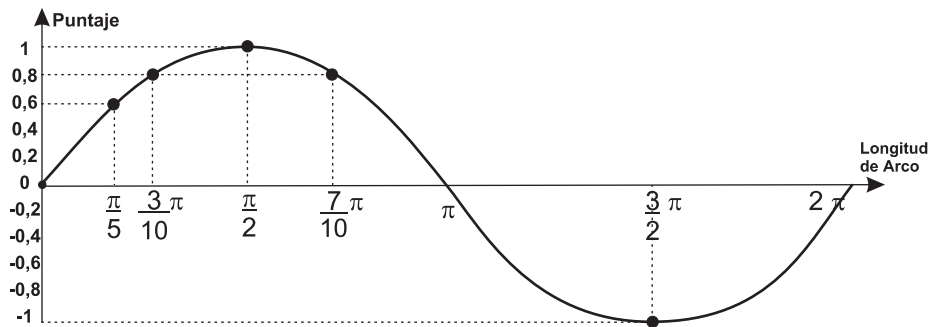
Arco	$\overline{A_0A_1}$	$\overline{A_0A_2}$	$\overline{A_0A_3}$	$\overline{A_0A_4}$	$\overline{A_0A_5}$	$\overline{A_0A_6}$	$\overline{A_0A_7}$	$\overline{A_0A_8}$	$\overline{A_0A_9}$	$\overline{A_0A_{10}}$
Longitud (en rad)			$\frac{3\pi}{10}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{10}$			π
En decimales (aprox)					1,57		2,2			3,14
Arco	$\overline{A_0A_{11}}$	$\overline{A_0A_{12}}$	$\overline{A_0A_{13}}$	$\overline{A_0A_{14}}$	$\overline{A_0A_{15}}$	$\overline{A_0A_{16}}$	$\overline{A_0A_{17}}$	$\overline{A_0A_{18}}$	$\overline{A_0A_{19}}$	$\overline{A_0A_{20}}$
Longitud (en rad)				$\frac{14\pi}{10}$						2π
En decimales (aprox)										6,28





ORIENTACIONES

Si completamos el gráfico en el que se representa el puntaje obtenido por acertar al satélite después de que haya recorrido determinado arco de circunferencia, se obtiene la siguiente representación en \mathbf{R}^2 :



En el gráfico podemos observar que:

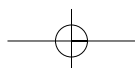
- Se obtiene puntaje nulo si el satélite es alcanzado después de haber recorrido un arco de **0 rad**, o de π **rad** o de 2π **rad**.
- Se obtiene puntaje negativo si el disparo certero se hace cuando el satélite ha recorrido un arco de entre π **rad** y 2π **rad**.
- Se obtiene puntaje positivo cuando la instrucción de ataque le acierta al satélite cuando ha recorrido un arco de entre **0 rad** y π **rad**.
- El puntaje máximo que se puede obtener es de 1 punto cuando se acierta al satélite después de recorrer un arco de $\frac{\pi}{2}$ rad.
- El disparo que menos conviene es que se acierte al satélite después de haber recorrido un arco de $\frac{3}{2}\pi$ **rad** ya que da un puntaje de -1.

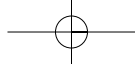
Uso de la calculadora: Veamos cómo se puede usar la calculadora científica para calcular el puntaje de cada disparo certero. Póngala en **MODE RAD** y en la pantalla debe aparecer la leyenda **RAD** o una letra **R**. Use la tecla **SIN** para el valor de la longitud de arco correspondiente. Por ejemplo, para el arco A_0A_5 , teclee: $\pi / 2 \rightarrow \text{SIN}$ (en ese orden o en el orden inverso, según la calculadora que tenga). Lo que aparece en la pantalla de su calculadora, ¿conuerda con lo representado en el gráfico?

Usted ya utilizó la tecla **SIN** de su calculadora en las Actividades N° 1 y N° 2 de esta Unidad. En esa oportunidad, la usó en **MODE DEG** porque los ángulos con los que trabajamos estaban en grados sexagesimales. Tenga en cuenta en que **MODE** debe usar la calculadora en cada caso.



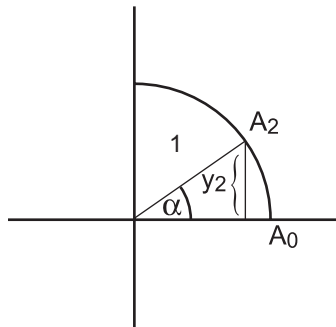
2. Verifique los demás puntajes obtenidos usando su calculadora.





ORIENTACIONES

En las **Actividades N° 1** y **N° 2**, trabajamos con la razón trigonométrica “seno del ángulo α ” utilizándola en triángulos rectángulos. Podríamos ubicar un triángulo rectángulo en la circunferencia del juego descrito para relacionar lo hecho en aquellas actividades con lo que estamos haciendo en ésta. Observe el siguiente dibujo:



En el dibujo, vemos que a un ángulo α le corresponde una determinada longitud de arco.

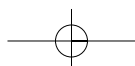
Si tenemos en cuenta que:

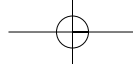
- la razón trigonométrica “seno de α ” es el cociente entre la medida del cateto opuesto de α y la hipotenusa,
- el cateto opuesto coincide con la ordenada y_2 (o sea el puntaje en el juego),
- la hipotenusa coincide con el radio, que mide 1.

$$\text{Resulta que: } \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} A_0A_2 = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{y_2}{1} = y_2.$$

Es decir que el seno del ángulo α coincide con el puntaje obtenido por el disparo. Podemos ampliar esta coincidencia a cualquier ubicación del satélite, es decir, a cualquier punto de la circunferencia.

Cuando en la igualdad anterior escribimos la expresión y_2 estamos utilizando un subíndice, el 2, junto con el valor de y . El subíndice tiene por intención únicamente diferenciar el valor usado en cada caso. Como en este caso se trata del puntaje correspondiente al arco A_0A_2 utilizamos como subíndice el número 2, pero podríamos haber usado cualquier otro.





Parte D

La empresa creadora de este juego ha decidido ampliar las posibilidades de recorrido del satélite. Esta ampliación consiste en que el satélite pueda dar más de una vuelta a la circunferencia y además puede girar en el otro sentido (es decir, "como las agujas del reloj").

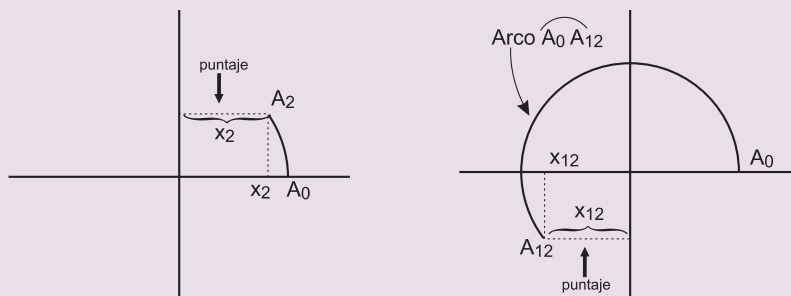
Teniendo en cuenta esta nueva información y dibujando sobre la circunferencia los recorridos indicados en cada caso, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ocurre con los puntajes asignados cuando el satélite es alcanzado por un disparo después de recorrer un arco de más de 2π rad? Por ejemplo:
 - a) ¿Cuál es el puntaje obtenido si el disparo certero se produce cuando el satélite ha recorrido una longitud de arco de $2\pi + \pi/2 = (5/2)\pi$ rad? ¿Cómo es este puntaje con respecto al obtenido por acertarle cuando recorrió un arco de $\pi/2$ rad?
 - b) ¿Y si el arco mide $2\pi + \pi/4 = (9/4)\pi$ rad? Compárelo con el puntaje obtenido si el arco mide $\pi/4$ rad.
 - c) ¿Y con $2\pi + (3/2)\pi = (7/2)\pi$ rad? Compare con $(3/2)\pi$ rad.
2. ¿Qué pasa si el satélite diera las vueltas en el sentido contrario al que venimos trabajando (es decir, "como las agujas del reloj")? Para distinguir este sentido del otro, usaremos un signo " - " delante de la longitud del arco. Por ejemplo:
 - a) ¿Cuál es el puntaje por acertar el disparo cuando el satélite giró una longitud de arco de $-\pi/2$ rad? ¿Con qué puntaje coincide de los que se obtienen con el sentido de giro "en contra de las agujas del reloj"?
 - b) ¿Y si el satélite giró un arco de $-3\pi/2$ rad?
 - c) ¿Y si giró -2π rad?
 - d) ¿Y si giró $(-\pi/2 - 2\pi)$ rad?

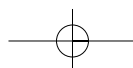
Parte E

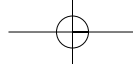
La empresa Mon-Ku sacó al mercado un juego muy parecido al descrito en la Parte A. En este juego el puntaje obtenido por el disparo que acierta al satélite es el valor de la abscisa de cada punto A_i .

Veamos algunos ejemplos utilizando el siguiente dibujo:



En este juego, por ejemplo, si el satélite ha recorrido el arco $\widehat{A_0A_2}$, (el puntaje del disparo certero es la abscisa x_2 ; para el caso del arco $\widehat{A_0A_{12}}$ es x_{12} .





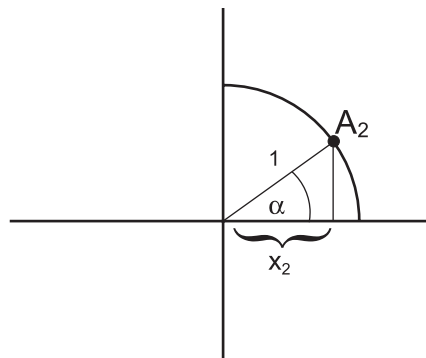
Responda las siguientes consignas:

1. ¿Qué signo tiene el puntaje en cada uno de estos dos casos?
2. En la circunferencia del gráfico dado en la **Parte B**, tiene indicados los puntos A_0 y A_1 . Además, en el ítem 4., usted agregó los puntos A_2, A_3, \dots, A_{20} .

Utilizando dichos puntos, y teniendo en cuenta la forma en que se asignan los puntajes en este nuevo juego, repita lo pedido en los ítems 4., 5., 6. y 7. de la **Parte B** y en la **Parte C**. Para hacer la verificación con la calculadora científica debe usar la tecla COS (también acá en MODE RAD).

ORIENTACIONES

En las **Actividades N° 1** y **N° 2**, trabajamos con la razón trigonométrica “coseno del ángulo α ” en triángulos rectángulos. Si ubicamos un triángulo rectángulo en la circunferencia del juego descrito resulta el siguiente dibujo:



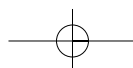
Vemos que a un ángulo α le corresponde una determinada longitud de arco.

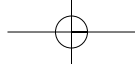
Teniendo en cuenta que:

- la razón trigonométrica “coseno de α ” es el cociente entre la medida del cateto adyacente de α y la hipotenusa,
- el cateto adyacente coincide con la abscisa x_2 (o sea el puntaje),
- la hipotenusa coincide con el radio, que mide 1.

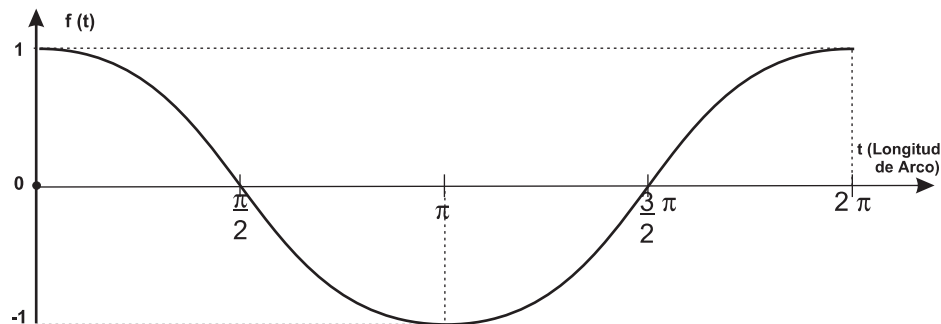
$$\text{Resulta que: } \cos \alpha = \cos A_0A_2 = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{x_2}{1} = x_2.$$

Es decir que el coseno del ángulo α coincide con el puntaje obtenido por el disparo. Podemos ampliar esta coincidencia a cualquier ubicación del satélite, es decir, a cualquier punto de la circunferencia.





El gráfico que representa el puntaje para cada longitud de arco correspondiente a un disparo acertado en el satélite es el siguiente:



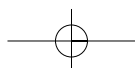
A partir de él, podemos observar y corroborar puntajes positivos, puntajes negativos, puntajes nulos, puntaje máximo, puntaje mínimo y para qué longitudes de arco se obtienen.

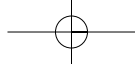
Parte F

La empresa Mon-Ku también decidió ampliar las posibilidades de recorrido del satélite. Como en el otro juego, esta ampliación consiste en que el satélite pueda dar más de una vuelta a la circunferencia y además puede girar en el otro sentido.

Teniendo en cuenta esta nueva información, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ocurre con los puntajes asignados cuando el satélite es alcanzado por un disparo después de recorrer un arco de más de 2π rad? Por ejemplo:
 - a) ¿Cuál es el puntaje obtenido si el disparo certero se produce cuando el satélite ha recorrido una longitud de arco de $2\pi + \pi/2 = (5/2)\pi$ rad? ¿Cómo es este puntaje con respecto al obtenido por acertarle cuando recorrió un arco de $\pi/2$ rad?
 - b) ¿Y si el arco mide $2\pi + \pi/4 = (9/4)\pi$ rad? Compárelo con el puntaje obtenido si el arco mide $\pi/4$ rad.
 - c) ¿Y con $2\pi + (3/2)\pi = (7/2)\pi$ rad? Compare con $(3/2)\pi$ rad.
2. ¿Qué pasa si el satélite diera las vueltas en el sentido contrario al que venimos trabajando (es decir, "como las agujas del reloj")? Para distinguir este sentido del otro, usaremos un signo " - " delante de la longitud del arco. Por ejemplo:
 - a) ¿Cuál es el puntaje por acertar el disparo cuando el satélite giró una longitud de arco de $-\pi/2$ rad? ¿Con qué puntaje coincide de los que se obtienen con el sentido de giro "en contra de las agujas del reloj"?
 - b) ¿Y si el satélite giró un arco de $-3\pi/2$ rad?
 - c) ¿Y si giró -2π rad?
 - d) ¿Y si giró $(-\pi/2 - 2\pi)$ rad?





ORIENTACIONES

En las **Partes B y C**, la función que da el puntaje obtenido en cada disparo acertado es $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbf{R} / f(t) = \mathbf{sen } t$, siendo t la longitud de cada arco de circunferencia (en radianes).

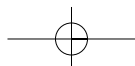
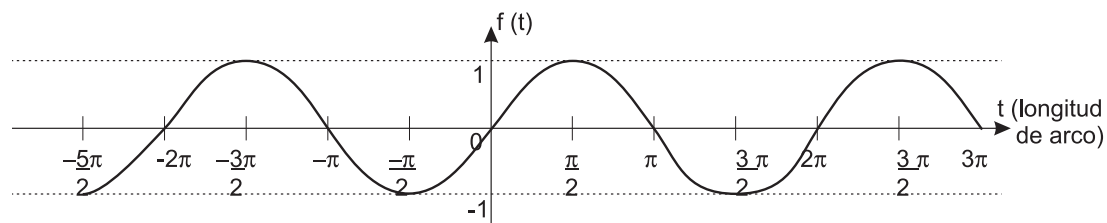
En esas Partes consideramos que el satélite es impactado antes de llegar a dar una vuelta completa a la circunferencia (o sea que el arco recorrido mide entre 0 y 2π radianes). Considerando, entonces, el intervalo $[0; 2\pi]$, vemos que:

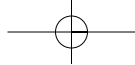
- Se obtiene puntaje por acertarle al satélite en cualquier punto de la circunferencia, es decir que se puede considerar al intervalo $[0; 2\pi]$ como **dominio** de la función f . En símbolos **Dom** $f = [0; 2\pi]$
- El mayor puntaje (1 punto) se obtiene si el satélite recorre un arco de $\pi/2$ rad. Es decir que la función seno tiene un **máximo relativo o local** en $t = \frac{\pi}{2}$. El valor máximo es 1.
- El menor puntaje (-1 punto) se obtiene si el satélite recorre un arco de $\frac{3}{2}\pi$ rad. O sea que la función f tiene un **mínimo relativo** en $t = \frac{3}{2}\pi$. El valor mínimo es -1.
- De los tres puntos anteriores se puede deducir que el **conjunto imagen** de la función seno es el intervalo $[-1; 1]$. En símbolos: **Im** $f = [-1; 1]$.
- No se modifica el puntaje (se obtiene 0 punto) si la orden es recorrer un arco de 0 rad, π rad ó 2π rad. Estos son los **ceros** de la función f . Es decir que el **conjunto de ceros** es $C^0 = \{0; \pi; 2\pi\}$.
- Se obtienen puntajes positivos para longitudes de arco entre 0 rad y π rad. Es decir que el **conjunto de positividad** de la función f es $C^+ = (0; \pi)$.
- Se obtienen puntajes negativos para longitudes de arco entre π rad y 2π rad. Es decir que el **conjunto de negatividad** de la función f es $C^- = (\pi; 2\pi)$.

En la **Parte D**, cuando consideramos la posibilidad de que el satélite dé más vueltas, tanto en un sentido como en el otro, podemos decir que ampliamos el dominio de la función f al conjunto de los números reales \mathbf{R} .

Observamos que los puntajes se repiten cada 2π radianes. O sea que se repiten cada vuelta completa dada tanto en sentido horario como en sentido antihorario. Se dice, entonces que la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(t) = \mathbf{sen } t$ es una **función periódica** y el período es de 2π .

El gráfico de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(t) = \mathbf{sen } t$ es aproximadamente así:





Análogamente, en la **Parte E**, la función que da el puntaje obtenido en cada disparo acertado es $\mathbf{g: [0 ; 2\pi] \rightarrow \mathbf{R} / g(t) = \cos t}$, siendo \mathbf{t} la longitud de cada arco de circunferencia (en radianes).

Considerando el intervalo $[0 ; 2\pi]$, vemos que:

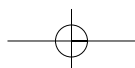
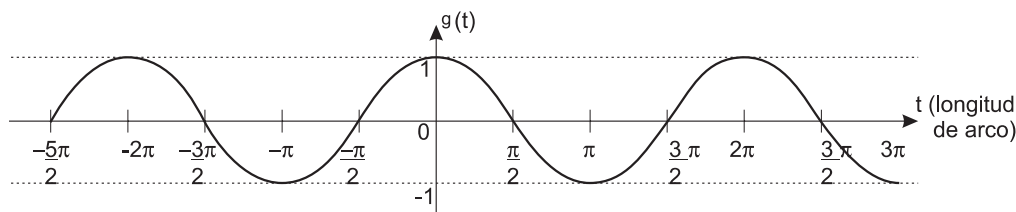
- Se obtiene puntaje por acertarle al satélite en cualquier punto de la circunferencia, es decir que se puede considerar al intervalo $[0 ; 2\pi]$ como **dominio** de la función \mathbf{g} . En símbolos $\mathbf{Dom\ g = [0 ; 2\pi]}$.
- El mayor puntaje (1 punto) se obtiene si el satélite recorre un arco de 0 ó 2π rad. La función \mathbf{g} tiene **máximos locales o relativos** en $t = 0$ y $t = 2\pi$. El valor máximo es 1.
- El menor puntaje (-1 punto) se obtiene si el satélite recorre un arco de π rad. El valor **mínimo** de la función \mathbf{g} es -1 cuando $\mathbf{t = \pi}$.
- De los tres puntos anteriores se puede deducir que el **conjunto imagen** de la función coseno es el intervalo $[-1 ; 1]$. En símbolos: $\mathbf{Im\ g = [-1 ; 1]}$.
- No se modifica el puntaje (se obtiene 0 punto) si la orden es recorrer un arco de $\pi/2$ rad ó $3\pi/2$ rad. Estos son los **ceros** de la función \mathbf{g} en $[0 ; 2\pi]$.

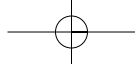
Simbólicamente, $\mathbf{C^0 = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\}}$.

- Se obtienen puntajes positivos para longitudes de arco entre 0 rad y $\pi/2$ rad ó entre $3\pi/2$ rad y 2π rad. Es decir que el **conjunto de positividad** de la función \mathbf{g} es $\mathbf{C^+ = (0 ; \pi/2) \cup (3\pi/2 ; 2\pi)}$.
- Se obtienen puntajes negativos para longitudes de arco entre $\pi/2$ rad y $3\pi/2$ rad. Es decir que el **conjunto de negatividad** de la función \mathbf{g} es $\mathbf{C^- = (\pi/2 ; 3\pi/2)}$.

Si ampliamos el dominio de la función \mathbf{g} al conjunto de los números reales \mathbf{R} , observamos que los puntajes se repiten cada 2π radianes. O sea que se repiten cada vuelta completa dada, tanto en sentido horario como en sentido antihorario. Se dice, entonces que la función $\mathbf{g: R \rightarrow R / g(t) = \cos t}$ es una **función periódica** y el período es de 2π .

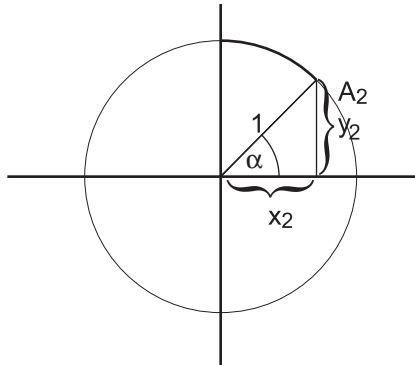
El gráfico de la función $\mathbf{g: R \rightarrow R / g(t) = \cos t}$ es aproximadamente así:





Parte G

Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo representado a continuación y el teorema de Pitágoras:



1. Escriba una igualdad que le permita relacionar a x_2 e y_2 .
2. Escriba una igualdad que le permita relacionar a $\cos \alpha$ y $\sen \alpha$.

ORIENTACIONES

En el triángulo rectángulo que hemos ubicado dentro de la circunferencia por la que gira el satélite, la hipotenusa mide 1 y los catetos miden x_2 e y_2 . Por lo tanto, se puede establecer la siguiente relación pitagórica: $x_2^2 + y_2^2 = 1$.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: LA IDENTIDAD PITAGÓRICA

Lo observado para los puntajes x_2 e y_2 se puede ampliar a cualquier otro par de puntajes x e y . Teniendo en cuenta que la abscisa x representa al $\cos t$ y que la ordenada y representa al $\sen t$, entonces se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\cos^2 t + \sen^2 t = 1.$$

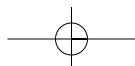
Esta igualdad se denomina **identidad pitagórica**.

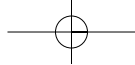
ACTIVIDAD N° 5: “TRABAJANDO CON EL LIBRO”

Parte A



En esta parte de la actividad lo orientaremos para que trabaje utilizando el libro temático 2: *Funciones 2* de Altman, S. y otros, editorial Longseller. El abordaje de estos temas se realizará únicamente en base a la lectura y la resolución de las actividades que le indicaremos en los siguientes párrafos.





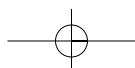
En el capítulo 4 - Funciones y ecuaciones trigonométricas:

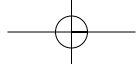
1. Lea "Generalización de las definiciones de las relaciones trigonométricas" en las páginas 89, 90 y 91.
2. Resuelva los ejercicios 10, 11 y 12 propuestos en el recuadro izquierdo de la página 90.
3. Lea "Otro sistema de medición de ángulos: sistema circular" en las páginas 93 y 94.
4. Resuelva el ejercicio 16 propuesto en el recuadro derecho de la página 93.
5. Resuelva el problema 5 en la página 94.
6. Lea la resolución del problema 5 en la página 94.
7. Lea "Funciones trigonométricas" en las páginas 95, 96 y 97.
8. Lea el recuadro "Algo más" de la derecha de la página 95.
9. Resuelva el ejercicio 17 propuesto en el recuadro derecho de la página 95.
10. Resuelva los ejercicios 19 y 20 propuestos en el recuadro derecho de la página 97.
11. Resuelva el problema 6 y lea su resolución en las páginas 98 y 99.
12. Lea "Ecuaciones trigonométricas" en las páginas 99 y 100.
13. Resuelva el ejercicio 23 del recuadro derecho de la página 100.
14. Resuelva los ejercicios 16, 17, 18, 19 y 20 de la Guía de ejercitación propuesta en las páginas 105 y 106.

Parte B

En la **Parte A**, usted debió leer y trabajar sobre el tema ecuaciones trigonométricas. Dio las soluciones de esas ecuaciones trabajando en el conjunto de los números reales \mathbf{R} . Ahora le pedimos que resuelva la ecuación $2 \cdot \cos x - 1 = 0$, considerando a x en cada uno de los siguientes intervalos:

- a) $[0 ; 2\pi]$
- b) $[0 ; 5\pi]$
- c) $[-2\pi ; 5\pi]$





ORIENTACIONES

Si resolvemos la ecuación $2 \cdot \cos x - 1 = 0$ en $[0 ; 2\pi]$, de todas las soluciones que tiene esta ecuación en \mathbf{R} , nos quedamos sólo con $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{5}{3}\pi$.

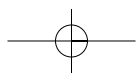
Si, en cambio, queremos dar las soluciones en $[-2\pi ; 5\pi]$, tenemos algunas más además de las dos anteriores. En este caso, las soluciones son:

$$x = -\frac{\pi}{3}, x = -\frac{5}{3}\pi, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5}{3}\pi, x = \frac{7}{3}\pi, x = \frac{11}{3}\pi \text{ y } x = \frac{13}{3}\pi.$$

Por lo tanto, si el conjunto en el que debemos buscar las soluciones de una ecuación no es el conjunto de todos los números reales, tenemos que restringir las soluciones a tener en cuenta sólo a aquellas que pertenezcan al conjunto (o intervalo) dado.

Antes de comenzar a estudiar la próxima unidad, usted debe resolver los ejercicios de integración correspondientes a la Unidad 4.

¡No deje de realizarlos!



Sucesiones

En esta unidad trabajaremos con algunas situaciones reales que pueden ser representadas a través de funciones que tienen características especiales: las sucesiones. Entre ellas, veremos especialmente las sucesiones aritméticas y las sucesiones geométricas.

Propósitos de la unidad

En relación con los contenidos de esta unidad, le proponemos que:

- Reconozca las características de las sucesiones.
- Represente los términos de una sucesión en un sistema de ejes coordenados cartesianos.
- Escriba los términos de una sucesión, a partir de su fórmula.
- Escriba la fórmula de una sucesión a partir de sus términos.
- Reconozca las características de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Resuelva situaciones problemáticas en las que sea necesario usar sucesiones.

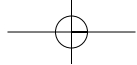
ACTIVIDAD N° 1: “EL ALQUILER DE UN MICRO”

Los alumnos de una escuela organizan una excursión. Averiguan precios para alquilar un micro que los lleve a su destino. En una de las empresas de alquiler de micros les informan que cuesta \$ 240.

Deciden que van a repartir el costo del alquiler en forma equitativa (o sea, en partes iguales) entre las personas que viajen.

Parte A

1. A partir de la información anterior, responda las siguientes preguntas:
 - a) Si deciden viajar 10 personas, ¿cuánto debe pagar cada una?
 - b) Si deciden viajar 24 personas, ¿cuánto paga cada una?
 - c) Si viaja una cantidad n de personas, ¿con qué cuenta se puede calcular la cantidad p de pesos que debe pagar cada una? Escriba una fórmula que permite calcular p a partir de n .
 - d) Si el micro tiene capacidad para 28 pasajeros, defina una función p que describa la situación planteada.



2. Complete la siguiente tabla y represente la función definida en el ítem 1. d) en un sistema de ejes coordenados cartesianos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
p											

3. ¿Puede unir los puntos obtenidos? ¿Por qué?

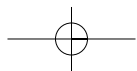
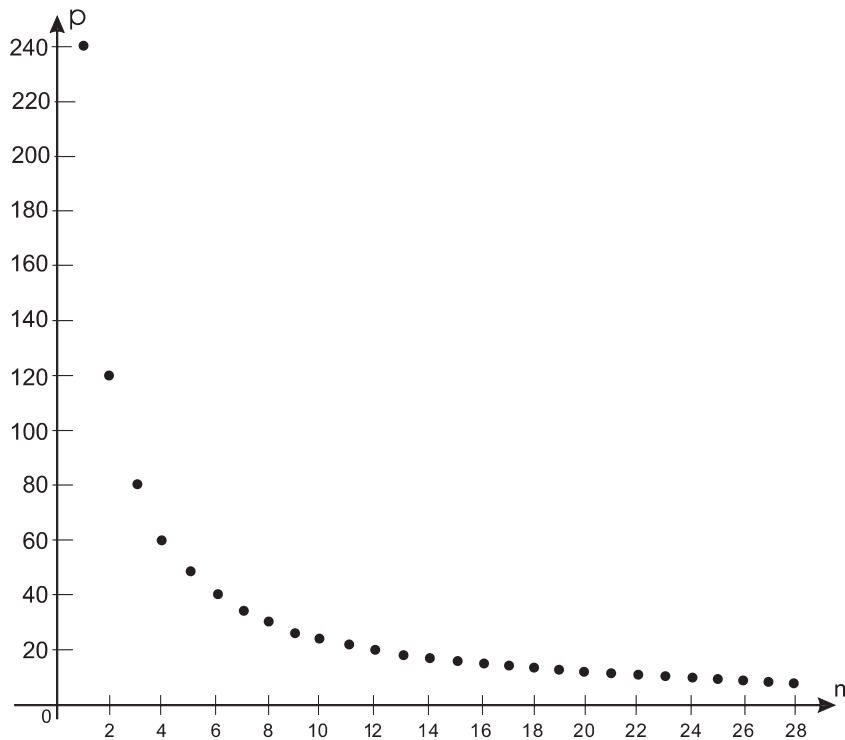
ORIENTACIONES

Teniendo en cuenta las condiciones dadas en el enunciado de la **Actividad N° 1**, la función que sirve de modelo para describir la situación planteada es:

$$p : \{n \in \mathbf{N} / 0 < n \leq 28\} \rightarrow \mathbf{R} / p(n) = \frac{240}{n}.$$

El dominio de la función es el conjunto $\{n \in \mathbf{N} / 0 < n \leq 28\}$ (o sea el conjunto de los números naturales mayores que 0 y menores o iguales que 28) porque el micro tiene capacidad para 28 pasajeros.

La representación gráfica de la función definida está dada por 28 puntos aislados (es decir que no se pueden unir con una línea continua), ya que no tiene sentido hablar de una cantidad de pasajeros que no sea un número natural entre 1 y 28 (por ejemplo, no podemos decir que van a viajar 8,6 pasajeros).



Parte B

Si el micro no tuviera límite de capacidad, es decir si pudieran viajar todas las personas que lo deseen, responda las siguientes consignas:

1. ¿Cuántos pares de valores (n ; p) se podrían formar?
2. Si tuviera que definir una función que represente esta situación, ¿qué cambiaría en ella en relación con la función que definió en la **Parte A**? Defina esta nueva función.
3. ¿Cómo sería la representación gráfica de esta nueva función? Descríbala con sus palabras.

ORIENTACIONES

Si se supone que el micro tiene una capacidad ilimitada, podríamos considerar que el dominio de la función es el conjunto de los números naturales sin el cero (en símbolos: $\mathbf{N} - \{0\}$). En el dominio sólo podemos utilizar números naturales porque sus elementos representan a la cantidad de pasajeros que viajan en el micro. Por lo tanto, se podrían formar infinitos pares de valores (n ; p). La función que describiría lo planteado en la **Parte B** es:

$$p : \mathbf{N} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R} / p(n) = \frac{240}{n} .$$

Las imágenes obtenidas a través de esta función se pueden escribir en fila, una a continuación de la otra. Queda así: 240; 120; 80; 60; 48; 40; 34,28...; 30; (¿Son las imágenes que usted dio para los primeros números naturales?)

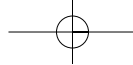
La representación gráfica, en este caso, es una sucesión de infinitos puntos aislados. Teniendo en cuenta la fórmula de la función dada (que es racional), dichos puntos están ubicados sobre una hipérbola.

Si no entiende a qué nos referimos al decir función de fórmula racional puede revisar este tema en la Unidad 3 de Matemática B.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: SUCESIONES. TÉRMINO DE LA SUCESIÓN. TÉRMINO GENERAL

La función definida en la **Parte B** de la **Actividad N° 1** es un ejemplo de un tipo de funciones llamadas **sucesiones**.

La característica principal de una sucesión es que su dominio es el conjunto de los números naturales sin el cero ($\mathbf{N} - \{0\}$), como en este caso, o el conjunto de números naturales (\mathbf{N}), como veremos más adelante. Es decir que, una sucesión es una función que a cada número natural del dominio le asigna un número real



como imagen. Cada imagen que se obtiene a través de esta función se llama **término de la sucesión**. Con las imágenes obtenidas podemos formar una fila infinita de números reales.

En la sucesión definida en esta **Actividad N° 1**, algunos términos son:

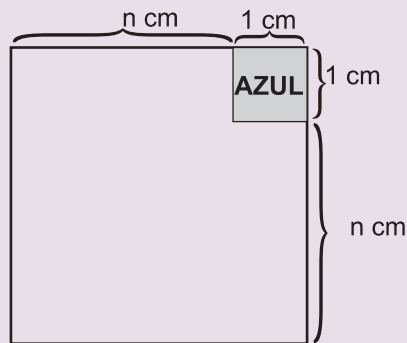
$$a_1 = 240, a_2 = 120, a_3 = 80, a_4 = 60, a_5 = 48, \dots, a_{18} = 13, \overline{3}, \dots, a_{40} = 6.$$

(Utilizamos los subíndices 1, 2, 3, ..., 40 para identificar a cada uno de los términos de la sucesión.)

En símbolos, una sucesión es una función $f: \mathbf{N} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R} / f(n) = a_n$, o también $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} / f(n) = a_n$. Cada valor de a_n es un término de la sucesión. A la fórmula de la función la llamamos **término general de la sucesión**, pues es la que permite hallar cada uno de los términos de la misma. Muchas veces indicamos una sucesión de la siguiente manera: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$

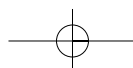
ACTIVIDAD N° 2: “DISEÑO DE PIEZAS PARA UN JUEGO”

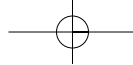
Las piezas de un juego son cuadradas y todas deben tener un cuadrado de 1 cm de lado pintado de azul. La pieza más chica tiene lados de 1 cm y, por lo tanto, es azul. Las medidas de los lados de las piezas deben ser números enteros y expresarse en centímetros. Para fabricarlas se tiene en cuenta un molde como el que se muestra en el siguiente esquema:



A partir de la información anterior, responda las siguientes preguntas:

1. En el caso de la pieza más chica,
 - a) ¿cuánto vale n ?
 - b) ¿Cuántos cm^2 mide esta pieza?
2. La pieza que le sigue en tamaño,
 - a) ¿cuántos cm^2 mide?
 - b) ¿Cuánto vale n en este caso?
 - c) Si $n = 2$, ¿cuántos cm^2 mide la pieza?





3. Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta que s expresa la superficie de la pieza para cada n :

n (en cm)	1	2	3	4	5	8	12	20
s (en cm^2)								

4. Escriba la fórmula que le permite calcular la superficie s de una pieza a partir de la medida de n .
5. Defina la función s que sirva de modelo para describir las posibles superficies de las piezas de este juego, suponiendo que la medida de n no tiene limitaciones (es decir, que puede ser cualquier número natural).
6. Represente la función que definió en el ítem anterior en un sistema de ejes coordenados cartesianos.

ORIENTACIONES

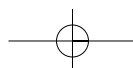
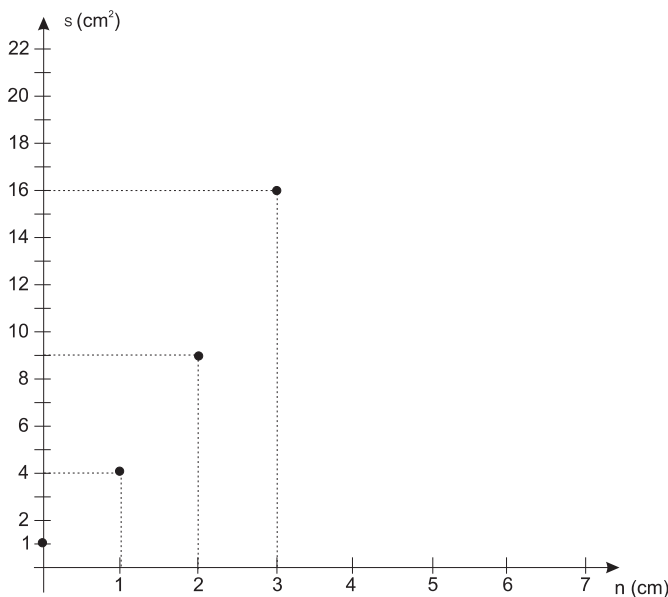
Para calcular la superficie de cada pieza, se suma 1 a cada valor de n para obtener la medida del lado de la pieza, y se eleva esta suma al cuadrado. Así, la fórmula para calcular la superficie de cada pieza resulta $s(n) = (n + 1)^2$.

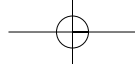
La función que permite describir lo observado con las superficies de las piezas es

$$s: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} / s(n) = (n + 1)^2.$$

Este es otro ejemplo de sucesión, en este caso, su dominio es \mathbf{N} .

La gráfica en \mathbf{R}^2 de esta sucesión está formada por infinitos puntos aislados ubicados sobre una parábola. A continuación se representan algunos de ellos:





Como dijimos en el apartado En términos matemáticos anterior, también se puede hablar de una sucesión cuando la función se define de \mathbf{N} en \mathbf{R} . Los términos de esta sucesión son: $\mathbf{a}_0 = 1$; $\mathbf{a}_1 = 4$; $\mathbf{a}_2 = 9$; $\mathbf{a}_3 = 16$, etc. El término general es $\mathbf{a}_n = (\mathbf{n} + 1)^2$.

En lo que sigue y en el libro que leerá trabajaremos con sucesiones cuyo dominio es \mathbf{N} .

ACTIVIDAD N° 3: “EL NEGOCIO DE VENTA DE LAVANDINA”

Manolo tiene un negocio de venta de artículos de limpieza en el que también vende lavandina. En su negocio, la lavandina está envasada en botellas de un litro. Cada botella cuesta \$ 0,50. Por día puede llegar a vender hasta 20 litros.

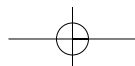
En el barrio le ha aparecido competencia a Manolo. Se ha instalado otro negocio del mismo rubro que vende lavandina al mismo precio por litro. Como promoción, en sus vidrieras se exhibe el siguiente cartel:

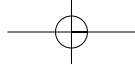
**Hasta 20 litros,
le vendemos la cantidad de
lavandina que usted quiera**

Parte A

Teniendo en cuenta la información anterior, responda las siguientes preguntas:

1. Si necesitara 2,3 litros de lavandina, ¿en cuál de los negocios podría comprar exactamente esa cantidad? ¿Cuánto le costaría?
2. Si tuviera que comprar 6 litros de lavandina, ¿dónde podría hacerlo? ¿Cuánto debería pagar en cada negocio?
3. Si con x se expresa la cantidad de litros de lavandina que se puede comprar en cualquiera de los dos negocios, ¿cuál es la cuenta que le permite calcular el importe p a pagar por su compra? Escriba la fórmula que exprese dicha cuenta para calcular p a partir de x .
4. Si usted va alguno de estos negocios y no compra lavandina, ¿cuál es el valor de x ? ¿Cuánto vale p en ese caso?
5. Teniendo en cuenta las condiciones de venta descritas en cada negocio, escriba:
 - a) Una función m que permita describir las posibles ventas en el negocio de Manolo.
 - b) Una función c que permita describir las posibles ventas en el negocio de la competencia.





6. En las funciones que escribió en el ítem 5., ¿dónde se manifiesta la diferencia en las formas de venta de la lavandina de cada uno de los dos negocios?
7. Represente las dos funciones que definió en el ítem 5. en dos sistemas de ejes cartesianos. ¿Qué diferencias tienen ambas representaciones gráficas?

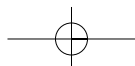
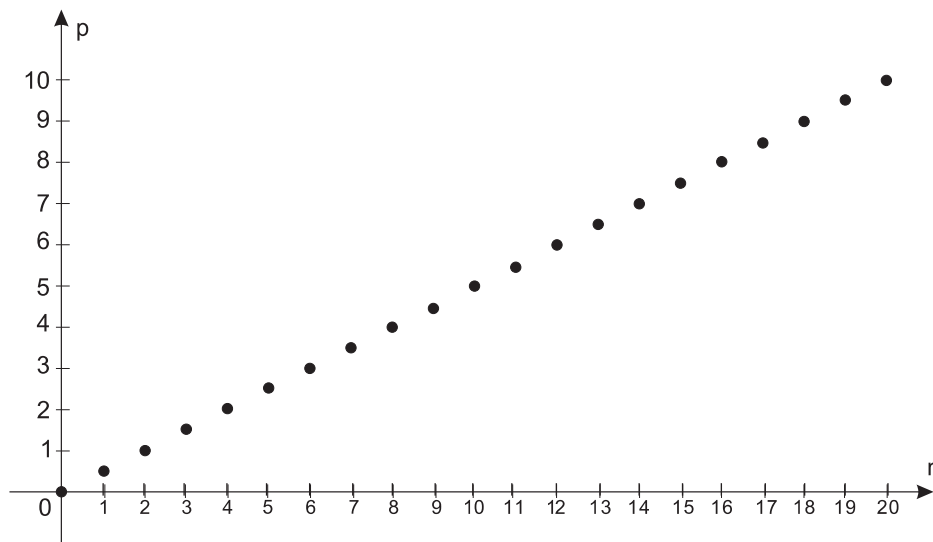
ORIENTACIONES

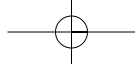
La función que describe las posibles compras en el negocio de Manolo es $\mathbf{m: \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \dots; 20\} \rightarrow \mathbf{R} / \mathbf{p} = 0,50 \cdot \mathbf{x}}$, donde \mathbf{x} representa la cantidad de litros de una compra y \mathbf{p} expresa el importe a pagar por dicha compra.

La función que describe las posibles compras en el negocio de la competencia es $\mathbf{c: [0 ; 20] \rightarrow \mathbf{R} / \mathbf{p} = 0,50 \cdot \mathbf{x}}$, donde \mathbf{x} representa la cantidad de litros de una compra y \mathbf{p} expresa el importe a pagar por dicha compra.

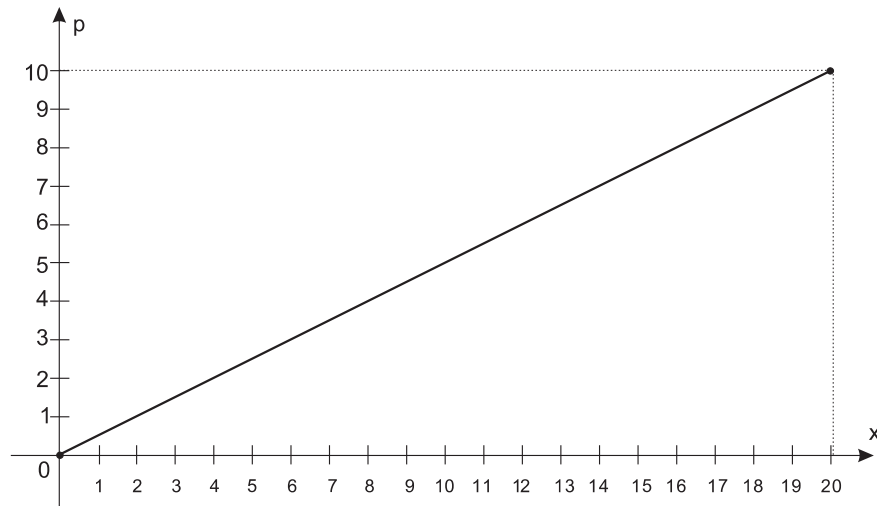
Estas funciones \mathbf{m} y \mathbf{c} tienen la fórmula y el conjunto de llegada en común, pero tienen diferente dominio. Esta diferencia se debe a la distinta forma de envasado de la lavandina en cada negocio. Las diferencias de forma de venta o envasado se pueden visualizar mejor en sus representaciones gráficas. Veamos:

Para la función \mathbf{m} :





Para la función **c**:



Parte B

Ahora supongamos que en estos dos negocios se pueden comprar cantidades ilimitadas de lavandina, siempre con las formas de venta de cada uno: en lo de Manolo en botellas de un litro; en la competencia, la cantidad que el cliente quiera.

Teniendo en cuenta la información anterior, responda las siguientes preguntas:

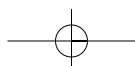
1. ¿Cómo quedan definidas las funciones de venta de lavandina en cada uno de los negocios? Defina la función **M** para el negocio de Manolo y la función **C** para la competencia.
2. ¿Cuál de las funciones que definió en el ítem 1. es una sucesión?
3. Represente ambas funciones en dos sistemas de ejes coordenados cartesianos. ¿Cuáles son las diferencias entre las dos representaciones gráficas?

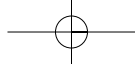
ORIENTACIONES

La función $\mathbf{M} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} / \mathbf{M}(x) = 0,50 \cdot x$ que describe lo que pasaría con las ventas en el negocio de Manolo es una sucesión.

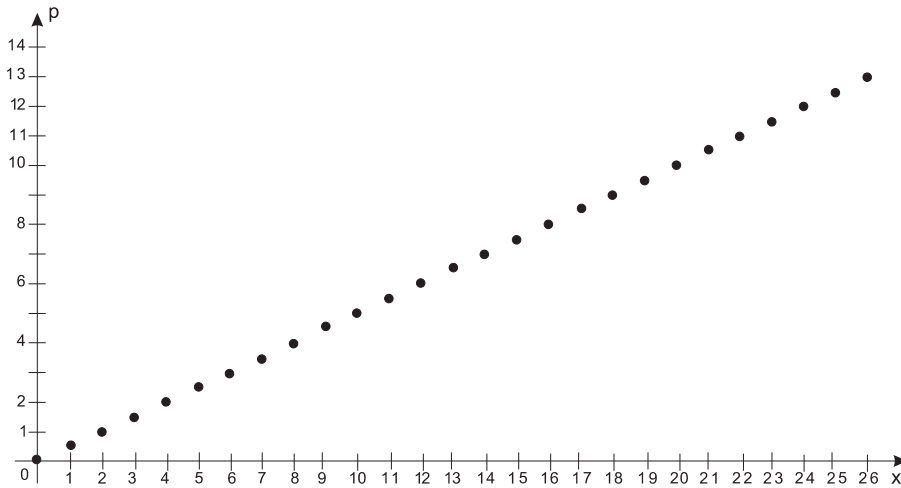
La función que describe lo que ocurriría con las ventas en el negocio de la competencia es $\mathbf{C} : [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R} / \mathbf{C}(x) = 0,50 \cdot x$. Esta función no es una sucesión porque su dominio no es \mathbf{N} .

La función **M** y la función **C** se diferencian en su dominio. A partir de esta diferencia también difieren sus representaciones gráficas. La representación gráfica de la función **M** está formada por infinitos puntos aislados alineados entre sí. En cambio, la representación gráfica de la función **C** es una semirrecta que contiene a los puntos de la gráfica de **M**. Las gráficas son las siguientes:

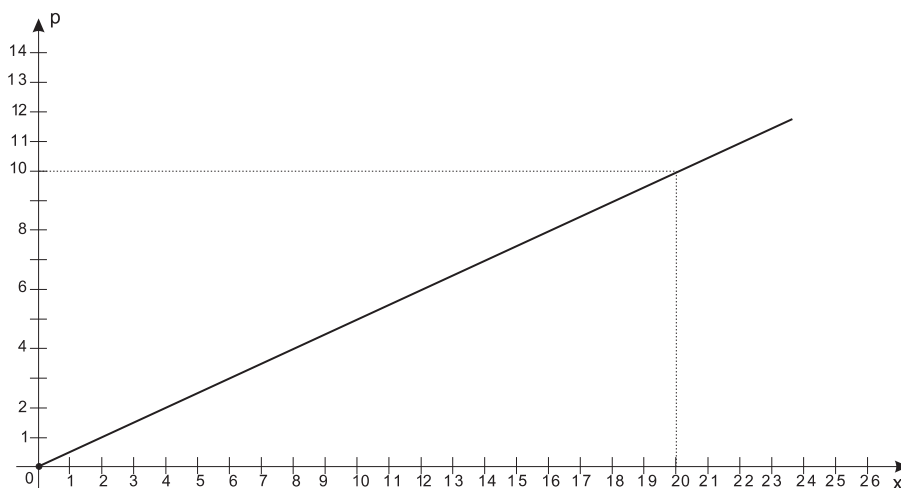




Para la función **M**:



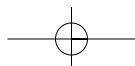
Para la función **C**:

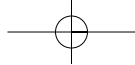


Parte C

Responda las siguientes consignas:

1. Escriba los 10 primeros términos de la sucesión **M**.
2. ¿Qué cuenta debe hacer con un término cualquiera de la sucesión para obtener el término siguiente?
3. Si llamamos a_n a los términos de la sucesión,
 - a) ¿Cuánto resulta $a_7 - a_6$?
 - b) ¿Y $a_{23} - a_{22}$?
4. En general, ¿cuánto vale $a_n - a_{n-1}$? Es decir, ¿cuánto vale la diferencia entre un término y el anterior a él?





ORIENTACIONES

En la sucesión **M** se puede observar que:

- Dado un término cualquiera, para obtener el término siguiente se le debe sumar 0,5.
- Cualquiera sea el par de términos consecutivos que se tome, resulta que la diferencia entre ellos es siempre 0,5 que es el precio del litro de lavandina.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: SUCESIÓN (O PROGRESIÓN) ARITMÉTICA. DIFERENCIA O RAZÓN.

La sucesión **M** es un ejemplo de **sucesión (o progresión) aritmética**. En este tipo de sucesiones podemos obtener cada término sumándole un mismo número al término anterior. Por lo tanto, podemos escribir que $a_n = a_{n-1} + r$, siendo **r** el número que sumamos a cada término para obtener el siguiente. También podemos decir que el número **r** expresa la diferencia entre un término de la sucesión y el anterior. Por eso este número, $r = a_n - a_{n-1}$, se llama **diferencia o razón de la sucesión aritmética**.

La fórmula de las sucesiones aritméticas es una fórmula lineal. Es decir, que podemos escribir la fórmula así: $f(n) = r \cdot n + b$, donde la pendiente **r** de la función lineal equivale a la diferencia de la sucesión y la ordenada al origen **b** es el primer término a_0 .

La representación gráfica de una sucesión aritmética está formada por infinitos puntos aislados alineados.

ACTIVIDAD N° 4: “LA REPRODUCCIÓN DE LAS BACTERIAS”

En esta actividad vamos a retomar la Actividad N° 1 de la Unidad 3 de Matemática C.

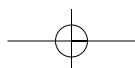
Ahí hemos analizado el proceso de reproducción de bacterias por bipartición:

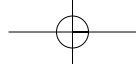
¿Lo recuerda? Si no, le sugerimos que revise lo hecho allí antes de seguir leyendo.

Parte A

Considere el proceso de reproducción descrito en esa actividad y responda las siguientes consignas:

1. Defina la función **b** que describe lo que ocurre con la cantidad **b** de bacterias al considerarse **x** etapas.
2. La función que definió en el ítem 1., ¿es una sucesión? ¿Por qué?
3. Revea, en la **Parte B** de la **Actividad N° 1** de la **Unidad 3**, la representación gráfica de esta función **b**.





ORIENTACIONES

La función que describe el proceso de reproducción de las bacterias a medida que pasan las etapas es $\mathbf{b} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} / \mathbf{b}(x) = 2^x$. Dicha función es una sucesión.

Como vimos, la representación gráfica de esta función está formada por infinitos puntos aislados.

Parte B

Responda las siguientes consignas:

1. Escriba los 10 primeros términos de la sucesión definida en la **Parte A**.
2. Si llamamos \mathbf{b}_n a los términos de esta sucesión:
 - a) ¿Qué cuenta debe hacer con un término de la sucesión para obtener el siguiente?
 - b) ¿Cuánto vale el cociente $\mathbf{b}_4 : \mathbf{b}_3$?
 - c) ¿Y $\mathbf{b}_{10} : \mathbf{b}_9$?
 - d) En general, ¿cuánto vale la razón o cociente $\mathbf{b}_n : \mathbf{b}_{n-1}$? Es decir, ¿cuánto vale el cociente entre un término y el término anterior a él?

ORIENTACIONES

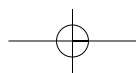
En la sucesión \mathbf{b} se puede observar que:

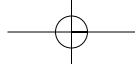
- Dado un término cualquiera, para obtener el término siguiente se lo debe multiplicar por 2.
- Cualquiera sea el par de términos consecutivos que se tome, resulta que la razón o cociente entre ellos es siempre 2, que indica la duplicación de la cantidad de bacterias en cada etapa.

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: SUCESIÓN (O PROGRESIÓN) GEOMÉTRICA. RAZÓN.

La sucesión \mathbf{b} es un ejemplo de **sucesión (o progresión) geométrica**.

En este tipo de sucesiones podemos obtener cada término multiplicando al término anterior por un mismo número. Por lo tanto, podemos escribir que $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}_{n-1} \cdot \mathbf{r}$, siendo \mathbf{r} el factor por el que se multiplica a cada término para obtener el siguiente. También podemos decir que el número \mathbf{r} expresa el





cociente o razón entre un término de la sucesión y el anterior. Este número, $r = b_n : b_{n-1}$, se llama **razón de la sucesión geométrica**.

La fórmula de las sucesiones geométricas es una fórmula exponencial. Es decir, que podemos escribir la fórmula así: $f(n) = k \cdot r^n$, donde la base r de la función exponencial equivale a la razón de la sucesión y el coeficiente k coincide con el primer término b_0 .

La representación gráfica de una sucesión geométrica está formada por infinitos puntos aislados que forman parte de la curva de una función exponencial.

ACTIVIDAD N° 5: “TRABAJANDO CON EL LIBRO”



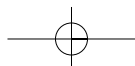
En esta actividad lo orientaremos para que trabaje utilizando el libro temático 3 Números y sucesiones de Altman, S. y otros, Editorial Longseller.

En el capítulo 3 - Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas:

1. Lea la presentación en la página 51.
2. Resuelva el Problema 1 y lea su resolución en la página 52.
Tenga en cuenta que en el libro se simboliza con \mathbf{N} al conjunto de números naturales sin el cero y con \mathbf{N}_0 al conjunto de números naturales con el cero.
3. Lea “Sucesiones” y “Progresiones aritméticas y geométricas” en las páginas 52, 53 y 54.
4. Resuelva los ejercicios 1, 2, 3 y 4 del recuadro de la derecha de la página 53.
5. Resuelva los ejercicios 5, 6, 7, 8 y 9 del recuadro de la izquierda de la página 54.
6. Resuelva el Problema 2 de la página 54 y lea su resolución en la página 55.
7. Resuelva el ejercicio 29 del recuadro de la izquierda de la página 62.
8. Resuelva los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 21 de las páginas 71, 72 y 74.
9. Resuelva los ejercicios 1, 2 y 3 de la página 77. Puede comparar sus respuestas con las dadas en la página 109.

Antes de comenzar a estudiar la próxima unidad, usted debe resolver los ejercicios de integración correspondientes a la Unidad 5.

¡No deje de realizarlos!



UNIDAD 6

Probabilidad

En esta unidad retomaremos el cálculo de probabilidades que comenzamos en la Unidad 7 de **Matemática A**. Analizaremos diferentes tipos de sucesos y su posibilidad de ocurrencia. Para ello trabajaremos previamente con el estudio de reglas que nos permitan contar el número de resultados de un suceso cuando los mismos no son posibles de contar en forma sencilla.

Estudiaremos también reglas del cálculo de probabilidades que nos permiten determinar la probabilidad de un suceso a partir de conocer la probabilidad de otro u otros sucesos del espacio muestral.

Propósitos de la unidad

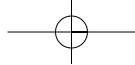
En relación con los contenidos de esta Unidad, le proponemos que:

- Utilice técnicas de conteo que proporciona el cálculo combinatorio.
- Identifique sucesos dependientes e independientes, excluyentes y no excluyentes.
- Calcule probabilidades de sucesos de acuerdo con sus características.
- Calcule probabilidades de sucesos complementarios y condicionales.
- Calcule probabilidades de la unión y la intersección de dos sucesos.

ACTIVIDAD N° 1: “DIFERENTES FORMAS DE ARMAR UN MENÚ”

En un restaurante se ofrecen menús promocionales a precios muy accesibles. Los mismos se componen de una bebida, una entrada, un plato principal y un postre. Cada cliente arma su almuerzo a partir de las siguientes listas:

BEBIDAS	ENTRADAS	PLATOS PRINCIPALES	POSTRES
Agua mineral	Matambre con ensalada rusa	Milanesa con puré	Ensalada de frutas
Gaseosa	Lengua a la vinagreta	Tallarines con salsa a elección	Flan mixto
	Ensalada a elección	Asado al horno con papas	Helado
		Calabaza rellena	



Parte A

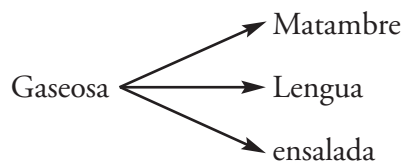
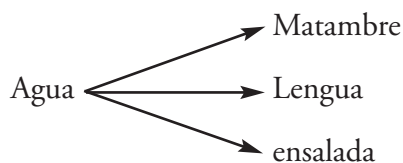
Responda las preguntas que le planteamos a continuación. Para hacerlo le sugerimos que construya un diagrama de árbol.

Si no recuerda cómo armar diagramas de árbol vuelva a mirar la Actividad N° 1 de la Unidad 3 de esta Guía.

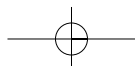
1. Por cada bebida, ¿cuántas opciones de entradas propone el restaurante?
2. Teniendo en cuenta sólo la bebida y la entrada, ¿cuántas elecciones diferentes pueden armarse?
3. Un cliente ya eligió la bebida y la entrada. Por cada elección, ¿entre cuántos platos principales puede optar?
4. Teniendo en cuenta sólo la bebida, la entrada y el plato principal, ¿cuántas elecciones diferentes pueden armarse?
5. El cliente ya eligió la bebida, la entrada y el plato principal. Por cada elección, ¿entre cuántos postres puede optar?
6. ¿Cuántos almuerzos completos diferentes pueden armarse?

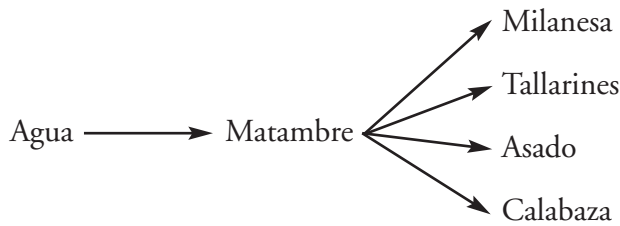
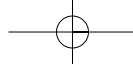
ORIENTACIONES

Por cada bebida podemos elegir 3 entradas. Como las opciones de bebida son 2, podemos armar $2 \cdot 3 = 6$ elecciones diferentes de bebida y entrada:



Una vez hecha esta elección, podemos optar entre 4 platos principales. Es decir, para cada una de las 6 elecciones anteriores, hay 4 opciones de plato principal. Por ejemplo, si consideramos la opción agua – matambre:





Y de la misma forma con cada una de las otras 5 elecciones restantes de bebida y entrada.

En total podemos armar $6 \cdot 4 = 24$ menús optando entre una bebida, una entrada y un plato principal. Si por cada uno de ellos agregamos las 3 opciones de postres, totalizamos $24 \cdot 3 = 72$ menús completos diferentes.

La cuenta completa que nos permite calcular la cantidad total de menús completos diferentes es:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 2 & \cdot & 3 & \cdot & 4 & \cdot & 3 & = & 72 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{cant. de} & & \text{cant. de} & & \text{cant. de} & & \text{cant. de} & & \text{menús} \\
 \text{bebidas} & & \text{entradas} & & \text{platos} & & \text{postres} & & \text{completos}
 \end{array}$$

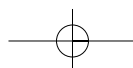
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: REGLA BÁSICA DEL CONTEO

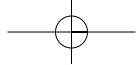
En la situación anterior, para cada uno de los componentes del menú tenemos una cantidad de resultados posibles: 2 bebidas, 3 entradas, 4 platos principales y 3 postres. La cantidad total de resultados, que simbolizamos con la letra T, es $T = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$

En general, si n_1 es la cantidad de resultados del primer paso de un experimento, n_2 la cantidad de resultados del segundo paso, ..., y n_k la cantidad de resultados del último paso, el número total de resultados posibles T es igual al producto de los resultados de cada paso:

$$T = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

Llamamos a esta última **regla básica del conteo**.





Parte B

Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta la cantidad total de menús calculados en la **Parte A**:

Para poder responder las preguntas que le planteamos a continuación usted necesita saber cómo calcular probabilidades. Si no lo recuerda, o nunca trabajó este tema antes, es conveniente que lo estudie previamente en la Unidad 7 de Matemática A.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente solicite el menú agua – lengua a la vinagreta – milanesa con puré – ensalada de frutas?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente solicite un menú que tenga agua mineral?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente solicite un menú que tenga milanesa con puré?

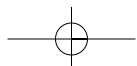
ORIENTACIONES

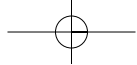
El **espacio muestral** del **experimento** “armar menús” tiene 72 **resultados** posibles, que son cada uno de los diferentes menús que podemos armar bajo las condiciones nombradas.

Cada una de las preguntas involucradas en la **Parte B** involucra un **suceso**. Para calcular la **probabilidad de ocurrencia de un suceso** debemos calcular la cantidad de resultados que lo conforman. Por ejemplo: es posible armar 12 menús que contengan milanesa con puré, por lo tanto, la probabilidad de que un cliente solicite un menú que contenga milanesa con puré es $\frac{12}{72} = \frac{1}{6}$.

Si no recuerda el significado de las palabras remarcadas en las orientaciones anteriores, puede trabajar el tema en la Unidad 7 de Matemática A.

En el ejemplo trabajado en la actividad anterior, la cantidad de resultados es sencilla de enumerar. Podemos contarlos usando la regla básica del conteo, como hemos hecho, pero también podríamos escribir cada uno de los resultados posibles y luego contarlos. En los problemas con espacios muestrales mayores, este procedimiento podría resultar poco práctico y en algunos casos, imposible. Es por ello que en lo que sigue presentaremos algunas reglas y fórmulas, que deduciremos a partir de la enumeración de resultados, y que nos permitirán calcular la cantidad de resultados más rápidamente. De todos modos, no pierda de vista que siempre que la cantidad de resultados sea pequeña usted puede recurrir al conteo para calcularla.





ACTIVIDAD N° 2: “ELECCIONES INTERNAS DE UN PARTIDO POLÍTICO”

Un partido político llama a elecciones internas para definir el orden en el que sus 6 candidatos A, B, C, D, E y F aparecerán en la lista de legisladores.

Parte A

Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta lo trabajado en la **Parte A** de la **Actividad N° 1**:

1. ¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse los 6 candidatos en la lista del partido? Arme un diagrama de árbol que le permita contar todos los resultados posibles.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato D ocupe el primer lugar en la lista?

ORIENTACIONES

Para contar todos los posibles ordenamientos de los 6 candidatos en la lista del partido podemos utilizar la regla de conteo que presentamos en la **Actividad N° 1**. En este caso se trata de un experimento de 6 pasos, en el que cada paso es uno de los puestos de la lista de legisladores. En cada paso hay un resultado posible menos que en el anterior ya que el candidato que ocupe el primer lugar no podrá ocupar el segundo y así sucesivamente. Para el primer puesto hay 6 candidatos posibles, para el segundo quedan 5, para el tercero quedan 4, y así hasta llegar al sexto puesto. La cantidad total de ordenamientos de los 6 candidatos en la lista es:

$$T = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

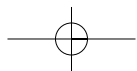
EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: FACTORIAL DE UN NÚMERO. PERMUTACIONES

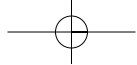
Al producto $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ lo escribimos en forma abreviada como $6!$, que leemos “seis factorial” ó “factorial de 6”.

En general, si el número de objetos que van a ser ordenados es n (siendo n un número natural) calculamos la cantidad de ordenamientos posibles de esos n objetos con la fórmula:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Leemos la expresión $n!$ diciendo: “**n factorial**” ó “**factorial de n**”. Definimos también $0! = 1$ y $1! = 1$





Uso de calculadora: Para calcular el factorial de un número, las calculadoras científicas cuentan con una tecla simbolizada con $x!$. Búsquela en su calculadora y vea de qué modo debe ingresar los datos para calcular este valor. Pruébela, por ejemplo, para el cálculo de $6!$.

A cada ordenamiento diferente de una cantidad de objetos lo llamamos **permutación**. La fórmula anterior, entonces, nos permite obtener el número total de **permutaciones de n objetos**. Simbólicamente escribiremos P_n para nombrar a las permutaciones de n elementos, cuyo número total calcularemos con la fórmula:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Parte B

El partido estima, a partir de sondeos de opinión, que logrará introducir 4 legisladores en las próximas elecciones. Es decir, que sólo los primeros 4 candidatos de la lista formarán parte de la futura Legislatura.

Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta esta nueva información:

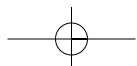
1. ¿De cuántas formas diferentes pueden ordenarse los 6 candidatos del partido en esos 4 primeros puestos de la lista? Utilice el diagrama de árbol que armó en la **Parte A** de esta actividad para contar todos los resultados posibles.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato D sea electo legislador, si los resultados se dan de acuerdo con los pronósticos?

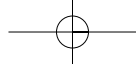
ORIENTACIONES

Podemos utilizar también la regla básica del conteo para calcular la cantidad total de ordenamientos posibles de los 6 candidatos en los 4 primeros puestos. Se trata, en este caso, de un experimento de 4 pasos en el que cada paso tiene también un resultado posible menos que el anterior. La cantidad total de ordenamientos de los 6 candidatos en los 4 primeros puestos de la lista es:

$$T = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Este resultado representa la cantidad total de permutaciones de los 6 candidatos en los 4 primeros puestos de la lista. El número de elementos n es 6 y el número de “casillas” en donde se pueden ubicar esos elementos es $x = 4$.





EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: PERMUTACIONES DE N OBJETOS TOMADOS DE A X

Definimos al número **T** calculado en la **Parte B** de esta actividad, como la cantidad total de permutaciones de 6 elementos tomados de a 4, y lo simbolizaremos como $P_{6,4}$ ó ${}_6P_4$

Otra forma de calcular esta cantidad es:

$${}_6P_4 = P_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

En general, la cantidad total de permutaciones de **n** elementos tomados de a **x** es:

$${}_n P_x = P_{n,x} = \frac{n!}{(n-x)!} \quad (\text{con } n > x)$$

Uso de calculadora: para calcular el número de permutaciones de *n* elementos tomados de a *x* algunas calculadoras científicas cuentan con una tecla que se simboliza ${}_n P_x$. Búsquela en su calculadora y vea de qué modo debe ingresar los datos para calcular este valor.



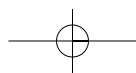
Como ya le decíamos anteriormente: no pierda de vista los diagramas de árbol ni la regla básica del conteo para calcular el número de permutaciones. Si se queda sólo con las fórmulas y los nombres, es posible que no sepa en qué situaciones debe utilizar cada una de ellas. Tenga en cuenta que usted pudo calcular el número total de permutaciones de los 6 candidatos en los 4 primeros puestos de la lista sin conocer ninguna fórmula. Esto mismo puede hacer siempre que la cantidad de elementos a permutar no sea muy grande. Nosotros necesitamos mostrarle la fórmula para que usted cuente con herramientas para calcular el número total de permutaciones cuando la cantidad de elementos a permutar es muy grande.

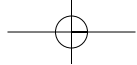
ACTIVIDAD N° 3: “UN KILO DE HELADO”

Una heladería ofrece el kilo de helado a un precio muy bajo si se eligen 3 gustos entre: limón – dulce de leche – frutilla – vainilla.

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas combinaciones de helado de 3 gustos pueden armarse? Arme, si lo necesita, un diagrama de árbol para contarlas.
2. Limón – dulce de leche – frutilla, ¿es una combinación posible? ¿Y limón – frutilla – dulce de leche?





3. ¿Cómo son entre sí las dos combinaciones anteriores?
4. Cuente cuántas de las posibles combinaciones de 3 gustos de helados calculadas en el ítem 1. representan al mismo kilo de helado.
5. De acuerdo con su respuesta a los ítems 1. y 3., ¿cuántas combinaciones diferentes de helado de 3 gustos pueden armarse?

ORIENTACIONES

Al calcular el número total de permutaciones de 4 gustos de helados tomados de a 3, se cuentan posibilidades que representan a la misma combinación de helados. En el caso de los candidatos de la lista, la permutación ABCD y la permutación BACD, por ejemplo, son diferentes porque no es lo mismo ser el primer candidato de la lista que ser el segundo. Pero en este caso no ocurre lo mismo. Llevar un kilo de helado de limón, dulce de leche y frutilla es lo mismo que llevar un kilo de helado de limón, frutilla y dulce de leche, y es lo mismo que llevar 1 kilo de helado de dulce de leche, limón y frutilla, y ...

Vamos a contar la cantidad de permutaciones que representan a la misma combinación de helados. En la lista que sigue representamos con su inicial a cada uno de los gustos de helado que pueden formar parte de la elección:

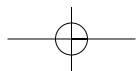
LVF	LVD	LDF	VFD
LFV	LDV	LFD	VDF
VLV	VLD	DLF	FVD
VFL	VDL	DFL	FDV
FLV	DLV	FLD	DFV
FVL	DVL	FDL	DVF

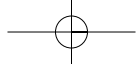
En la lista anterior podemos observar que, por cada combinación posible, siempre hay 5 permutaciones más que son iguales a ésta. Entonces sólo hay 4 combinaciones diferentes.

Una forma de calcular este número es restar a las ${}_4P_3$ las $5 \cdot 4 = 20$ repeticiones. Es decir, $24 - 20 = 4$.

Pero no siempre resulta sencillo visualizar, como en este caso, todas las repeticiones para saber cuántas debemos quitar. Por esa razón vamos a generalizar lo observado en esta situación para poder hallar una fórmula que nos permita determinar la cantidad de combinaciones sin necesidad de visualizarlas a todas.

Observe que en cada una de las 4 columnas anteriores hay 6 resultados ya que se trata de todas las permutaciones posibles de 3 elementos en 3 lugares: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$





Si al número de ${}_4P_3$ lo dividimos por esta cantidad también obtenemos la cantidad de combinaciones distintas de helados:

$$\frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$$

EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS: COMBINACIONES DE n ELEMENTOS TOMADOS DE a x . NÚMERO COMBINATORIO.

El número calculado al hacer la cuenta $\frac{{}_4P_3}{3!} = 4$ es el número de **combinaciones de 4 elementos tomados de a 3**. Lo simbolizamos ${}_4C_3$.

A diferencia de las permutaciones, en una combinación el orden en el que estén dispuestos los elementos carece de importancia.

En general, simbolizamos al número de **combinaciones de n elementos tomados de a x** como ${}_n C_x$ ó $C_{n,x}$ y lo calculamos con la fórmula:

$${}_n C_x = \frac{{}_n P_x}{x!} \quad (\text{con } n > x)$$

De acuerdo con lo hecho en la **Actividad N° 2**, ${}_n P_x = \frac{n!}{(n-x)!}$

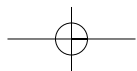
Si reemplazamos esto en la fórmula de ${}_n C_x$ nos queda:

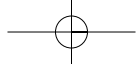
$${}_n C_x = \frac{\frac{n!}{(n-x)!}}{x!} = \frac{n!}{(n-x)! x!} \quad (\text{con } n > x)$$

A esta última expresión la simbolizamos $\binom{n}{x}$ que leemos “**número combinatorio n , x** ”.

Por lo tanto: $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! x!}$

Uso de calculadora: Para calcular el número de combinaciones de n elementos tomados de a x algunas calculadoras científicas cuentan con una tecla que se simboliza ${}_n C_x$. Búsquela en su calculadora y vea de qué modo debe ingresar los datos para calcular este valor.





ACTIVIDAD N° 4: “TRABAJANDO CON EL LIBRO”



En esta actividad lo orientaremos para que trabaje el libro *Matemática 1 Polimodal* de Camuyrano, B. y otros de editorial Estrada.

En el capítulo 14 - Probabilidades:

1. Resuelva los Ejercicios N° 1, 2, 3, 4 de la Ejercitación propuesta en la página 327.
2. Resuelva los Ejercicios N° 2 y 3 de la Ejercitación propuesta en la página 331.

Si tiene dificultades para responder lo pedido en estos ejercicios puede trabajar este tema en la Unidad 7 de *Matemática A* o bien leer en la página 331 del libro “*Propiedades de las probabilidades*”.

3. Lea la Situación 3: “Eficacia de un nuevo medicamento” en las páginas 332 a 336. A medida que avanza en su lectura intente ir resolviendo cada una de las cuestiones pedidas. En la tabla de la página 333 hay un error: en lugar de estar remarcados en color los 120 pacientes curados, deberían estar remarcados los 100 pacientes tratados.
4. Resuelva el ejercicio N° 1 de la Ejercitación propuesta en la página 336.
5. Lea en las páginas 336 y 337 “Tipos de sucesos”.
6. Lea en las páginas 337 y 338 “Probabilidades. Clasificación y fórmulas que permiten calcularlas”.
7. Resuelva los ejercicios 1, 2 y 3 de la Ejercitación propuesta en la página 338.
8. Resuelva los ejercicios 1, 3, 4, 5, 6, 9 y 10 de las Actividades de síntesis del capítulo en las páginas 354 y 355.

Para terminar el estudio de esta unidad usted debe resolver los ejercicios de integración correspondientes a la Unidad 6.

Una vez que haya finalizado con la resolución de los ejercicios de integración, resuelva también la Autoevaluación integradora. Su resolución le permitirá retomar todos los contenidos del programa de la materia y autoevaluar si ya se encuentra en condiciones de presentarse a rendir el examen. Tampoco deje de realizar esta actividad.

