Matemática

Números racionales

escuelas

La escuela
vuelve a la escuela

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

CAPÍTULO 1. PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 10 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura verde.

a) Por otro lado, se quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 4 litros de pintura verde. ¿Cuántos litros de pintura blanca se deberán usar en este caso?
b) Si se ponen 7 litros de pintura blanca, ¿cuántos litros de pintura verde se deberá utilizar para obtener la misma tonalidad?

PROBLEMA 2

Si a una mezcla de 2 litros de pintura verde y 7 litros de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más claro o más oscuro?

PROBLEMA 3

¿Será cierto que las siguientes mezclas permiten obtener la misma tonalidad?
Mezcla 1: 9 litros de pintura verde y 21 de blanca.
Mezcla 2: 15 litros de pintura verde y 35 de blanca.

PROBLEMA 4

Se mezclaron 3 litros de pintura verde con 7 litros de pintura blanca.

a) ¿Qué otras cantidades mezcladas darán la misma tonalidad?
b) Escribir una fórmula que permita determinar la cantidad de litros de pintura de un color, en función de la cantidad de pintura

Problema 5

Consideremos todas las mezclas de pintura que aparecen en los problemas anteriores:

Verde	Blanca
3	10
2	7
3	8
9	21
3	7

a) Ordenarlas de la más oscura a la más clara.
b) Escribir la fórmula de cada una de las mezclas, que exprese la cantidad de pintura blanca en función de la cantidad de pintura verde. Ordenar los 5 números racionales que se obtienen como constante.

....

Problema 6

En esta tabla se presenta la cantidad de harina y agua que debe utilizarse para hacer vainillas.
a) Completar la tabla:

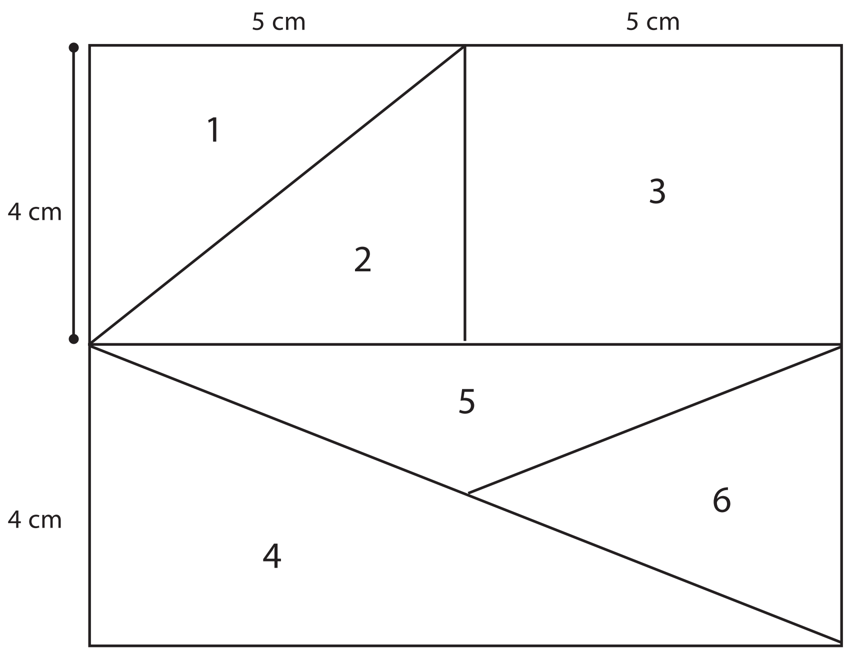
Cantidad de harina (en kilogramos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	....
Cantidad de agua (en litros)	$\frac{2}{3}$	....	....	....	2

b) Si se usa 1 kilo y medio de harina, ¿cuánta agua se necesitará?

....

PROBLEMA 7

ORGANIZACIÓN DE LA CLASE: Los alumnos trabajan en grupos. Cada equipo recibe un sobre con las piezas de un rompecabezas recortadas y numeradas. Una representación del rompecabezas original queda en el escritorio del docente o en el pizarrón. El esquema muestra las figuras que forman el rompecabezas con sus medidas:



a) El docente pedirá a cada grupo que modifique el rompecabezas de manera tal que lo que mide 4 cm pase a medir 7 cm.
b) Se hace el mismo pedido, pero ahora se quiere un modelo más pequeño, donde lo que mide 5 cm (o 5 unidades) pase a medir 3 cm.

PROBLEMA 8

a) Completen la siguiente tabla con los procedimientos que prefieran, sabiendo que expresa una proporción directa.

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{9}$	......	......
y	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	......	......	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{27}$

b) Escriban una fórmula que permita determinar el valor de una variable en función de la otra.

Problema 9

a) Decir si es V o F, para cualquier número b racional.

- 20% de b = $\frac{1}{5}$ de b
- $\frac{1}{5}$. b = 0,5 . b
- $\frac{b}{5} = \frac{20}{100}$b = 0,2b
- 125% b = $\frac{5}{4}$ b

b) Decir cuál es la respuesta correcta:

Si de un valor b se descuenta el 30%, se obtiene: ¿ $\frac{2}{3}$ b ó $\frac{7}{10}$ b?

……

Capítulo 1. Comentarios sobre los problemas

Proporcionalidad y orden en Q+

En este capítulo se proponen problemas en los que se pone en juego un aspecto del funcionamiento de las fracciones: la constante de proporcionalidad. Es decir, un "operador" que transforma una cantidad de una magnitud en su correspondiente de otra magnitud, mediante la multiplicación. Es un sentido de las fracciones diferente del que los alumnos podrían haber construido a partir de los problemas de reparto y medida, típicos de la escuela primaria[3].

Los primeros problemas que se presentan ponen en funcionamiento la idea de razón entre dos números. El requerimiento de comparar dos razones favorece la elaboración de criterios de comparación de números racionales, que cobran sentido en el contexto de cada problema.

Posteriormente, al solicitar la escritura de una fórmula que represente la relación de proporcionalidad en juego en cada problema, se plantea la necesidad de considerar cada razón como un número racional. Producir fórmulas para las funciones de proporcionalidad permite profundizar el conocimiento de los racionales. Al mismo tiempo, el trabajo con constantes racionales favorece el aprendizaje de la noción de relación de proporcionalidad. Por lo dicho, es un juego dialéctico entre lo numérico y lo algebraico.

En otros problemas, las propiedades de la proporcionalidad directa permitirán generar procedimientos "personales" para la multiplicación o la división de una fracción por un número natural u otra fracción, o para dar sentido a los procedimientos aprendidos.

Los primeros cinco problemas están en el contexto de preparar mezclas de pinturas.

[3] Estos son sentidos que los alumnos deberían haber construido en su paso por la escuela primaria. Es probable que esos aprendizajes requieran una revisión. Para ello se recomienda consultar **Matemática. Fracciones y números decimales**, 4º-7º grado, **Apuntes para la enseñanza, ibid.**

Problema 1

Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 10 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura verde.

a) Por otro lado, se quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 4 litros de pintura verde. ¿Cuántos litros de pintura blanca se deberán usar en este caso?

b) Si se ponen 7 litros de pintura blanca, ¿cuántos litros de pintura verde se deberá utilizar para obtener la misma tonalidad?

Comentarios sobre el problema

Para comenzar, puede ser necesario discutir con los alumnos acerca de que la conservación de la tonalidad necesita de la conservación de la relación entre la cantidad de pintura verde y la de pintura blanca que se usa.

La elección de los números 3 y 4 para la pintura verde, en el planteo inicial y en el ítem a), es intencional ya que puede hacer pensar a los alumnos que se debe sumar 1 litro a cada cantidad de pintura, es decir, que harán falta 11 litros de pintura blanca. Este tipo de respuesta resulta un error frecuente. Por tanto, se trata de generar una discusión que lleve a encontrar argumentos para validar o rechazar esta respuesta. Por ejemplo, un criterio que los estudiantes podrían elaborar es que si para 3 litros de pintura verde se usaron 10 de pintura blanca, hay más del triple de blanca que de verde. Esta relación no se cumple en el caso de 4 y 11 ya que 11 no llega a ser el triple de 4.

Otra posibilidad es preguntar a los alumnos por cantidades "fáciles" cómo *¿cuánta pintura blanca se requiere para 6 litros de verde? ¿Y cuánta pintura verde se necesita para 30 litros de blanca?* El docente puede confeccionar una tabla de valores en el pizarrón para organizar las respuestas. La intención es poder confrontar una probable respuesta correcta para las cantidades "fáciles", con la respuesta "aditiva" que se dio para el caso a) donde se plantea cuánta pintura blanca se deberá usar para 4 litros de pintura verde, manteniendo la tonalidad.

Una solución que los alumnos podrían elaborar para resolver el ítem a) es pasar por la unidad. Resulta probable que, al recurrir a la calculadora para hacer 10 : 3, respondan utilizando escrituras decimales. Para muchos estudiantes, 3,33 es una respuesta correcta al problema. Entonces éste es el momento de plantear una discusión que permita, sin rechazar totalmente la respuesta, arribar a la conclusión de que ésta es aproximada. Por ejemplo, se puede explicitar que si fuera el resultado de $\frac{10}{3}$, al multiplicarlo por 3, debería dar 10, y no es así. Lo que está en juego es aceptar que $\frac{10}{3}$ es un número, y no una operación a realizar; probablemente se necesitarán varios problemas más para que todos los alumnos lleguen a aceptar esto.

Muchos estudiantes pueden resolver “por regla de tres” o mirando una tabla de proporcionalidad. De este modo, es probable que lleguen directamente a la división 40 : 3, y respondan que para 4 litros de pintura verde se necesitan 13,33 litros de blanca. En este caso se requerirá una discusión análoga a la propuesta para 10 : 3.

Los alumnos familiarizados con escrituras periódicas podrían expresar las respuestas como 3,333... litros de blanca para 1 litro de verde, o bien 13,333... litros de blanca para 4 litros de verde, en lugar de utilizar $\frac{10}{3}$, o $\frac{40}{3}$. En estos casos, también sería conveniente promover una discusión sobre estas últimas escrituras que permita identificar que, a diferencia de las anteriores, éstas son respuestas exactas.

Se trata de poner en evidencia que el resultado de la división 10 : 3 es un número racional que admite diferentes formas de escritura: $\frac{10}{3}$ o 3,33..., o (en esta última escritura el entero $3\frac{1}{3}$ corresponde al cociente, y en la fracción $\frac{1}{3}$, 1 es el resto y 3 es el divisor). Análogamente, $\frac{40}{3}$= 13,333… = 13 . $\frac{1}{3}$

En cuanto al ítem b), la diferencia que aporta es que ahora la unidad estaría representada por un litro de pintura blanca, que lleva a considerar la fracción . $\frac{3}{10}$

Problema 2

Si a una mezcla de 2 litros de pintura verde y 7 litros de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más claro o más oscuro?

Comentarios sobre el problema

Aquí se retoma lo trabajado en el problema 1; se puede esperar que los alumnos, a partir de la discusión anterior, rechacen la idea de que se conserva la tonalidad y comiencen a discutir cuestiones relativas a la comparación.

Para resolver este problema es necesario considerar que se trata de dos mezclas a comparar. Como resultado del trabajo con el problema 1, es probable que calculen los valores de blanco para un litro de verde en ambas mezclas (o los valores de verde para un litro de blanca), produciendo tanto respuestas exactas como aproximadas. En este caso, las respuestas decimales aproximadas alcanzan para responder a lo que se pide.

Otra posibilidad es estudiar qué pasaría con ambas mezclas para 6 litros de pintura verde:

Verde	Blanca
2	7
6	21

Verde	Blanca
3	8
6	16

La lectura de los datos de la tabla permite arribar a que la mezcla de la derecha es más oscura que la otra, sin necesidad de realizar ningún cociente, menos aún de considerar fracciones.

En un aula donde coexistan estas distintas estrategias es posible pensar en un trabajo que permita establecer relaciones entre ambas: por ejemplo, identificar que los resultados numéricos obtenidos en la estrategia 1 se obtienen dividiendo (en un orden adecuado) cualquiera de las filas de cada una de las tablas. Se está poniendo en juego de manera implícita la idea de fracciones equivalentes, noción que se trabajará en varios problemas de éste y otros capítulos.

La segunda estrategia equivale a buscar fracciones equivalentes a las dadas, con igual numerador o denominador, como procedimiento útil para comparar fracciones.

Problema 3

¿Será cierto que las siguientes mezclas permiten obtener la misma tonalidad?
Mezcla 1: 9 litros de pintura verde y 21 de blanca.
Mezcla 2: 15 litros de pintura verde y 35 de blanca.

Comentarios sobre el problema

En este problema se resignifica lo trabajado antes. Se espera que los alumnos usen cualquiera de las estrategias anteriores, o que reduzcan la cantidad de pintura para 3 litros de verde en cada mezcla. La estrategia de calcular números para la cantidad de pintura blanca necesaria para un litro de verde (o viceversa), en cada mezcla, puede ser introducida por el docente si es necesario. La discusión en torno de las distintas estrategias desarrolladas permitiría el establecimiento de nuevas relaciones matemáticas en la clase.

En este problema, la equivalencia de razones está asociada a la conservación de la proporción para lograr la misma tonalidad, y no a la conservación de la cantidad de pintura.

Problema 4

Se mezclaron 3 litros de pintura verde con 7 litros de pintura blanca.

a) ¿Qué otras cantidades mezcladas darán la misma tonalidad?

b) Escribir una fórmula que permita determinar la cantidad de litros de pintura de un color, en función de la cantidad de pintura del otro color.

Comentarios sobre el problema

En la primera parte de este problema, se pretende que los alumnos produzcan distintas razones equivalentes a $\frac{7}{3}$ ó a $\frac{3}{7}$ (antes de la producción de la fórmula solicitada, puede ser que los alumnos no estén trabajando con el número $\frac{7}{3}$, sino con la relación "3 es a 7"), y lleguen, si es posible, a comprender que las cantidades mezcladas que darán la misma tonalidad son infinitas.

En la segunda parte, se pide la producción de una fórmula que permita calcular la cantidad de una pintura en función de la otra. Escribir la fórmula permite institucionalizar que la constante de proporcionalidad es un número racional que expresa la relación entre las cantidades. Este número aparecerá expresado como distintos cocientes, según se consideren las distintas soluciones dadas en el ítem a). Esto daría lugar a un trabajo sobre la noción de fracciones equivalentes. El objetivo no es que los alumnos memoricen la técnica de los "productos cruzados" para decidir sobre la equivalencia de fracciones, sino que se vayan construyendo en la clase criterios para decidir sobre la equivalencia a través del trabajo con los problemas.

Es probable que siga persistiendo en algunos alumnos su preferencia por trabajar con una aproximación decimal de la constante: 2,3 ó 0,42, según el sentido de la división que consideren. Más que rechazar la respuesta, es importante insistir en el carácter aproximado de la misma. Y plantear otras situaciones donde la escritura fraccionaria sea realmente más económica.

Por otra parte, no indicar cuál de las dos pinturas debe jugar el papel de variable independiente hará posible la producción de diferentes fórmulas. Estudiar la relación entre las dos fórmulas producidas permitiría un primer encuentro con la noción de inverso multiplicativo, tema que se aborda en el capítulo 4 de este documento.

En la medida en que se haya avanzado en el trabajo con funciones y sus gráficos (otro bloque de los programas de primer y segundo año), se puede completar el trabajo con este problema solicitando una representación gráfica de la función. Si los alumnos realizan una tabla de valores para hacer el gráfico, puede ser la oportunidad para destacar el valor o la importancia de la escritura fraccionaria: por ejemplo, si se considera la expresión $\frac{7}{3}$ para la constante, puede resultar sencillo calcular la imagen de los valores 3, 6, 9 ó 12, mientras que los resultados que se obtienen usando la escritura aproximada decimal resultan mucho más engorrosos para representar.

Por otro lado, el denominador y el numerador de cada una de las posibles representaciones fraccionarias de la constante pueden ser identificados en el gráfico como valores de x e y de diferentes puntos; mientras que el número racional que resulta de cualquiera de estos cocientes se identifica con el valor de y para $x = 1$. En esta parte del trabajo está en juego la idea de pendiente de una recta.

Problema 5

Consideremos todas las mezclas de pintura que aparecen en los problemas anteriores:

Verde	Blanca
3	10
2	7
3	8
9	21
3	7

a) Ordenarlas de la más oscura a la más clara.
b) Escribir la fórmula de cada una de las mezclas, que exprese la cantidad de pintura blanca en función de la cantidad de pintura verde. Ordenar los 5 números racionales que se obtienen como constante.

Comentarios sobre el problema

Para resolver el ítem a) se espera que los alumnos desarrollen estrategias "artesanales" similares a las utilizadas para estudiar la equivalencia de razones. Nuevamente, no se apunta a la memorización de la técnica de "los productos cruzados". Por ejemplo, todas las mezclas que tienen 3 litros verdes se comparan con la cantidad de blanca. La que tiene 9 litros de verde, se puede relacionar multiplicando cualquiera de las anteriores por 3. La segunda mezcla se compara directamente con la última, razonando que a igual cantidad de blanca, la última tiene más verde y, por tanto, es más oscura.

En el ítem b) se pide a los estudiantes que escriban la fórmula. Una práctica común de los alumnos es que realicen la cuenta y escriban la fórmula usando la expresión decimal. Esto podría generar una discusión sobre las ventajas de la escritura fraccionaria que muestra en todo momento la relación de proporcionalidad entre las pinturas. La expresión decimal no deja traslucir esta información. Sin embargo, la aproximación decimal es eficaz para responder a la pregunta de la comparación.

Una vez producidas las distintas fórmulas, se podrán apoyar en el trabajo realizado en el ítem a), para ordenar los distintas fracciones obtenidas. Como conclusión, sería interesante ir construyendo algunos criterios de comparación que derivan del trabajo hecho:

“Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.”
“Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.”

De igual modo, se podrá explicitar la estrategia de transformar una (o ambas fracciones a comparar) en otra equivalente para poder aplicar alguno de los dos criterios anteriores.

La comparación de fracciones será abordada nuevamente en el capítulo 2 de este documento.

Los siguientes problemas proponen, también, un trabajo con relaciones de proporcionalidad directa. Se espera producir con los alumnos recursos que permitan multiplicar y dividir fracciones (ver también capítulo 4).

Problema 6

En esta tabla se presenta la cantidad de harina y agua que debe utilizarse para hacer vainillas.

a) Completar la tabla:

Cantidad de harina (en kilogramos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	....
Cantidad de agua (en litros)	$\frac{2}{3}$	....	....	....	2

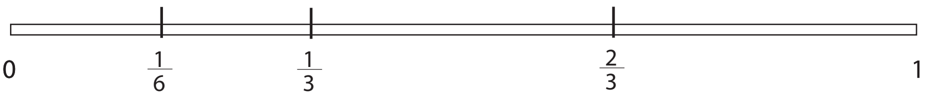
b) Si se usa 1 kilo y medio de harina, ¿cuánta agua se necesitará?

Comentarios sobre el problema

Para resolver el ítem a) de este problema, se espera que los alumnos desplieguen distintos razonamientos que les permitan completar la tabla. Por ejemplo, si para 1 kg de harina se utilizan $\frac{2}{3}$ litros de agua, para $\frac{1}{2}$ kilo de harina se necesitará la mitad de $\frac{2}{3}$ litros de agua. La cuestión a promover será, entonces, la búsqueda de la mitad de $\frac{2}{3}$. Para ello es posible que los alumnos recurran a diferentes tipos de representación de esta fracción (recta numérica, dibujos, etcétera) que permitan identificar $\frac{1}{3}$ como la respuesta. Es interesante, más allá de la representación seleccionada por los alumnos, que el docente solicite argumentos que den cuenta de que $\frac{1}{3}$ es la mitad de $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, “como dos veces un tercio es dos tercios, un tercio es la mitad de dos tercios”.

No se espera que los alumnos recurran al algoritmo de cálculo de división de fracciones. En ese caso, obtendrían $\frac{2}{6}$ como resultado de $\frac{2}{3}$: 2; y sería necesario recurrir a la noción de fracciones equivalentes para confrontar esta solución con el $\frac{1}{3}$ que puede haber aparecido por otro procedimiento.

Para averiguar qué cantidad de agua se necesita para un $\frac{1}{4}$ kilo de harina, se podrá apelar a un razonamiento similar al anterior. Es decir, se necesitará la mitad de $\frac{1}{3}$ litro de agua, esto se puede calcular apoyándose, una vez más, en diferentes representaciones de la fracción. En particular, en la recta numérica es posible analizar que la mitad de $\frac{1}{3}$ está justo en el medio entre 0 y $\frac{1}{3}$, y que dicho número entra 6 veces en el entero, por lo tanto, deberá ser : $\frac{1}{6}$



Otra manera de resolverlo sería considerar la fracción $\frac{2}{6}$ (equivalente a $\frac{1}{3}$), que permite calcular la división por 2 dividiendo el numerador.

Para establecer la cantidad de agua necesaria para $\frac{3}{4}$ kg de harina, la multiplicación entre un entero y una fracción –apelando a sumas reiteradas– podrá ser un recurso eficaz. También podría ser que los alumnos sumaran las cantidades de agua correspondientes a $\frac{1}{2}$ y a $\frac{1}{4}$ kilos de harina. Confrontando las dos resoluciones, se llegaría a la igualdad $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, que puede ser objeto de análisis.

Para calcular la cantidad de harina que se necesita para 2 litros de agua, el recurso de analizar cuántos tercios equivalen a 2 permitiría discutir con los alumnos que $\frac{2}{3}$ x 3 = 2. La cantidad de harina se calcula, entonces, multiplicando 1 kilo por 3.

Para responder el ítem b), se podrá pensar en que 1 $\frac{1}{2}$ kg es equivalente a la suma de 1 y $\frac{1}{2}$. Por tanto, sumando los correspondientes a estos valores, se obtendrá el resultado buscado: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ = 1. Otra posibilidad sería pensar que 1 kg y medio es dos veces $\frac{3}{4}$ kg; luego, se necesitarán dos veces $\frac{1}{2}$ litro.

Es interesante poder analizar la tabla completa, explicitando en ella los cálculos que han permitido obtener cada uno de los valores, por ejemplo:

: 2 : 2 x 3 x 2

Cantidad de harina (en kilogramos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	$1\frac{1}{2}$
Cantidad de agua (en litros)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{3} = 1$

: 2 : 2 x 3 x 2

Será importante avanzar en la explicitación de las propiedades de la proporcionalidad que permitieron obtener los resultados. A partir de esto, se podrán hacer explícitos ciertos recursos de cálculo:

- Para multiplicar una fracción por un entero, se puede sumar reiteradamente o bien multiplicar el numerador por el número entero.

- Para buscar la mitad de una fracción, basta con duplicar el denominador.

Estos recursos desplegados no ponen aún en funcionamiento la idea de constante de proporcionalidad. Si ya hubiera alguna experiencia con este tipo de funciones, sería interesante proponer a los alumnos la búsqueda de una fórmula que permita determinar la cantidad de agua conociendo la cantidad de harina. Es esperable, en ese caso, que los alumnos puedan producir una fórmula del tipo $y = x \cdot \frac{2}{3}$ a partir de conocer el valor de y para $x = 1$.

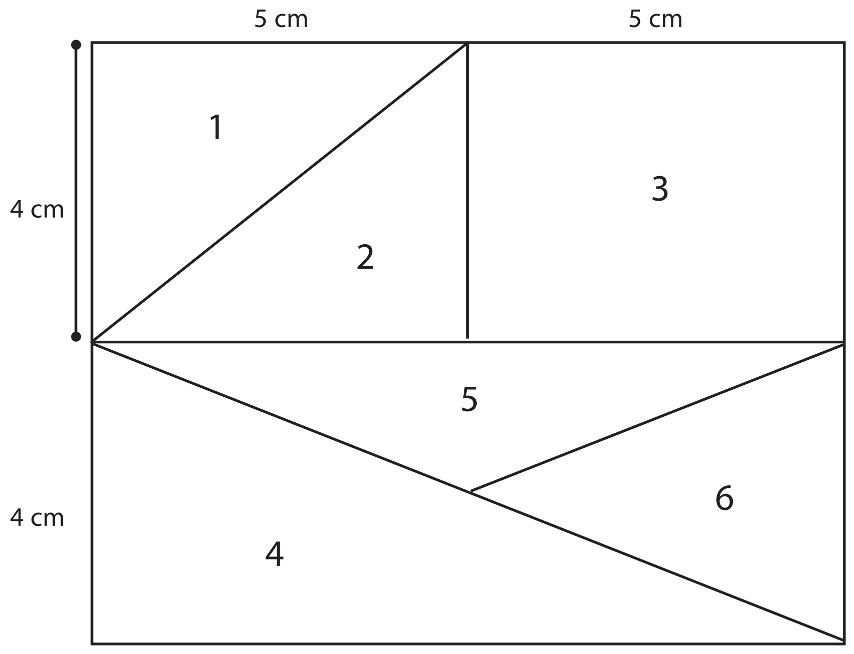
A partir del reconocimiento de la constante de proporcionalidad, será útil volver a la tabla con la finalidad de identificar que es posible "pasar" de la fila cantidad de harina, a la fila cantidad de agua, multiplicando por $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ (kilo de harina) multiplicado por $\frac{2}{3}$ da como resultado la cantidad de agua. Esto permitiría establecer que $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ tiene que dar como resultado $\frac{1}{3}$, y recuperar el algoritmo para la multiplicación de fracciones: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Del mismo modo se podrá concluir que $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ y que $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$.

De este modo, la multiplicación de fracciones toma sentido como herramienta para calcular, en una relación de proporcionalidad directa con constante fraccionaria, el correspondiente de un valor fraccionario. Y, al mismo tiempo, darle sentido al algoritmo de multiplicación de fracciones (numerador por numerador y denominador por denominador), que posiblemente algunos alumnos hayan aprendido en la escuela primaria.

PROBLEMA 7[4]

ORGANIZACIÓN DE LA CLASE: Los alumnos trabajan en grupos. Cada equipo recibe un sobre con las piezas de un rompecabezas recortadas y numeradas. Una representación del rompecabezas original queda en el escritorio del docente o en el pizarrón. El esquema muestra las figuras que forman el rompecabezas con sus medidas:

[4] Este problema es una adaptación de la situación creada por Guy Brousseau conocida como "Ampliación del rompecabezas". Guy Brousseau. **Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales. Trabajos de Matemática**. FAMAF. Universidad Nacional de Córdoba, 1993.



a) El docente pedirá a cada grupo que modifique el rompecabezas de manera tal que lo que mide 4 cm pase a medir 7 cm.
b) Se hace el mismo pedido, pero ahora se quiere un modelo más pequeño, donde lo que mide 5 cm (o 5 unidades) pase a medir 3 cm.

Comentarios sobre el problema

Este problema está planteado en un contexto geométrico que involucra la idea de semejanza. Para resolver el ítem a), algunos estudiantes podrían agrandar la pieza 1 de la siguiente manera:

Si a 4 cm le sumamos 3 cm para pasar a 7 cm, a 5 cm también le sumamos 3 cm pasando a 8 cm, y el tercer lado queda determinado.

Con esta estrategia, los alumnos pueden armar otro triángulo rectángulo. Este mismo procedimiento funciona, aparentemente, con los otros triángulos rectángulos y con el rectángulo, sin generar muchos cuestionamientos en los alumnos. Sin embargo, las piezas 5 ó 6 pueden generar alguna controversia en cuanto a decidir a qué lado agregar 3 cm, dado que en algún caso se puede perder la forma de triángulo isósceles.

Si aún así no se hubieran producido muchas dudas en cuanto a que la estrategia empleada es incorrecta, el conflicto surgirá cuando intenten reconstruir toda la figura y las piezas no encajen. La riqueza de este problema es que la validez, o no, de la estrategia empleada no viene dada por la autoridad del docente sino por la situación misma, que evidencia que no funciona. Esta posibilidad de control, por parte de los alumnos, no es posible en el problema de las pinturas.

La ineficacia del procedimiento aditivo debería permitir identificar como estrategia válida la búsqueda del valor correspondiente a la unidad. De este modo se podría recurrir a las propiedades de las relaciones de proporcionalidad, de manera similar a lo realizado en el problema anterior.

La organización de los datos en una tabla permitirá hacer un análisis que le dé sentido a la operatoria con fracciones:

Medidas de segmentos del original (en cm)	1	2	4	5	10
Medidas de su modelo ampliado (en cm)	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{2}$	7	$\frac{35}{4}$	$\frac{70}{4}$

Es decir, en este problema se tratan de encontrar las imágenes de números naturales, que resultan ser fracciones debido a los números que se eligen: $\frac{7}{4}$ es el coeficiente de proporcionalidad; los otros valores se encuentran multiplicando esta fracción por enteros.

La confrontación de resoluciones apoyadas en las propiedades de la proporcionalidad directa y aquéllas que apelen a la constante de proporcionalidad permitirán un trabajo sobre la multiplicación o la división de fracciones por números naturales.

Se puede prolongar este trabajo buscando la imagen de una fracción, a partir de conocer el procedimiento para encontrar la imagen de un entero.

El ítem b) apunta a la búsqueda de la constante de proporcionalidad que permita la transformación de una figura en otra semejante, mediante la multiplicación de un número natural por una fracción $\left(6 \cdot \frac{3}{5} 3 .\right)$

Se podrá retomar lo trabajado con la tabla, identificando nuevamente que la constante de proporcionalidad es el valor que se corresponde con el 1 ($\frac{3}{5}$ significa la medida del segmento reducido que corresponde a un original de 1 cm).

Considerando en conjunto los ítemes a) y b) es posible analizar con los alumnos que: "si la constante es mayor que 1, se trata de una ampliación y, en caso contrario, de una reducción".

Los problemas que se presentan a continuación están planteados en contextos matemáticos.

Problema 8

a) Completen la siguiente tabla con los procedimientos que prefieran, sabiendo que expresa una proporción directa.

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{9}$	......	......
y	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	......	......	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{27}$

b) Escriban una fórmula que permita determinar el valor de una variable en función de la otra.

Comentarios sobre el problema

El ítem a) de este problema tiene como objetivo volver sobre los conocimientos trabajados en los problemas anteriores.

En tanto que para la resolución del ítem b) –escribir las fórmulas–, el docente podrá generar una discusión acerca de las constantes de proporcionalidad, proponiendo la elaboración de una fórmula que considere *x* como variable independiente y otra donde la variable independiente sea *y*.

Esto permite abordar la idea de inverso multiplicativo. Por ejemplo, si para pasar de $\frac{2}{3}$ a $\frac{8}{9}$ hay que multiplicar por $\frac{4}{3}$, para pasar de $\frac{8}{9}$ a $\frac{2}{3}$ habrá que dividir por $\frac{4}{3}$, que según la fórmula equivale a multiplicar por $\frac{3}{4}$. Este análisis podría colaborar en la producción de un recurso de cálculo para dividir fracciones –en caso de que los alumnos no lo conozcan–, o hacer que den sentido a la regla que conocen.

El siguiente problema está planteado en el contexto de porcentajes (seguramente ya abordado en la escuela primaria), a partir del estudio de las relaciones entre este concepto y los de fracción y razón.

Se incorpora el recurso algebraico en la formulación y la validación de algunas generalizaciones que se estudian. Este recurso algebraico será objeto de trabajo en el capítulo 5.

Problema 9

a) Decir si es V o F, para cualquier número b racional.

- 20% de b = $\frac{1}{5}$ de b
- $\frac{1}{5}$. b = 0,5 . b
- $\frac{b}{5} = \frac{20}{100}$ b = 0,2 b
- 125% b = $\frac{5}{4}$ b

b) Decir cuál es la respuesta correcta:

Si de un valor b se descuenta el 30%, se obtiene: ¿ $\frac{2}{3}$ b ó $\frac{7}{10}$ b?

Comentarios sobre el problema

Para resolver el ítem a) es posible que algunos alumnos se apoyen en algún tipo de representación gráfica que les permita establecer relaciones entre $\frac{1}{5}$ y el 20%. Por ejemplo, el siguiente esquema:

20%	20%	20%	20%	20%

100%

Es decir, suponer que el todo es el 100%, partirlo en 5 partes iguales y concluir que cada una de las partes es $\frac{1}{5}$ del total, es decir, el 20%.

Otra posibilidad es que los alumnos asignen diferentes valores a *b* corroborando que 20% de *b* es igual a $\frac{1}{5}$ de *b*. Para muchos alumnos, esta verificación con algunos ejemplos les resulta suficiente para afirmar que vale para cualquier número racional. El docente podrá intervenir preguntando, por ejemplo, *¿cómo pueden estar seguros de que dará lo mismo para un número como éste,* $\frac{345}{17}$*, sin hacer la cuenta?*

Esta entrada en la búsqueda de argumentos generales para dar cuenta de la validez de una propiedad, que se enuncia para todo número, es de largo aliento. Se necesitarán muchas instancias de trabajo en el aula para que los alumnos vayan ubicando la verificación con ejemplos particulares en una fase exploratoria del problema. En el capítulo 5 se ofrecen variadas oportunidades para avanzar en esta dirección.

El recurso de los ejemplos resulta suficiente para invalidar que $. \, b \frac{1}{5} \, 0{,}5 \, . \, b$

Para analizar si $\frac{b}{5} = \frac{20}{100}$ $b = 0{,}2$ b, la noción de equivalencia es un recurso posible. Es decir, identificar $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} \, 0{,}2$ permitiría resolver esta cuestión.

Otro camino posible es escribir el porcentaje como fracción de denominador 100 y apelar a la noción de fracciones equivalentes ya trabajadas con anterioridad.

Es decir, tanto el procedimiento gráfico como considerar el porcentaje como fracción permitirían dar respuesta a los tres primeros puntos de esta parte del problema.

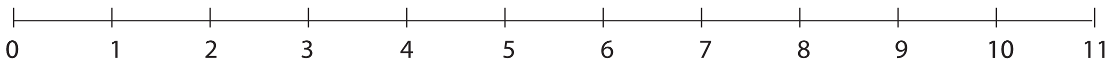
De manera análoga se podrá tratar el caso del 125%.

Para resolver el ítem b), es probable que los alumnos vuelvan una vez más a la verificación para ciertos valores de *b*. En este caso, como una de las fórmulas debe ser cierta, este recurso es suficiente para responder. La intervención docente podría promover el recurso, utilizado anteriormente, de tratar el porcentaje como fracción.

CAPÍTULO 2. PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Un robot A se desplaza dando pasos sobre una recta como la siguiente:



Los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3.

a) Si el robot se para en el 6 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

b) Identificá 5 puntos de la recta donde pararía el robot, que no sean los que aparecen marcados con los números naturales, y asignale un número a cada uno de esos 5 puntos.

Otro robot, llamado B, da pasos de distinta longitud que el robot A. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

c) Si el robot está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

d) Si se colocan los dos robots en el 15 y comienzan a caminar hacia la derecha, ¿hay algún punto del trayecto en el que pisan los dos robots?

e) ¿Cuál es la relación entre los pasos de los dos robots?

Problema 2

Se conocen ahora los datos de cinco robots más, C, D, E, F y G, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, de la siguiente manera:

C llega al	5 en	3 pasos
D llega al	5 en	9 pasos
E llega al	14 en	9 pasos
F llega al	10 en	6 pasos
G llega al	23 en	11 pasos

a) Ordená por tamaño, de menor a mayor, los pasos de los cinco robots. Explicá, con tus palabras, cómo hiciste para compararlos.

b) ¿Cuánto miden los pasos de cada robot? Ordená de menor a mayor los números que obtuviste.

Problema 3

Tenemos cinco robots llamados H, I, J, K, L, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, con pasos de la misma longitud, de la siguiente manera:

H llega al	8 en	3 pasos
I llega al	12 en	15 pasos
J llega al	4 en	2 pasos
K llega al	8 en	10 pasos
L llega al	18 en	9 pasos

Ordená de menor a mayor los robots, según la longitud de sus pasos. Explicá, con tus palabras, cómo comparaste cada número con los otros.

Problema 4

Cuatro chicos midieron el largo del pizarrón de su aula y llegaron a las siguientes conclusiones:

Adriana midió con un cordón, y le dio 6 cordones.
Sergio midió con su carpeta, y le dio 10 "largos de carpeta".
Javier midió con la regla, y le dio 250 cm.
Federico midió con su pulgar, y le dio 50 pulgares.

Suponiendo que los cuatro chicos midieron bien el pizarrón y que, entonces, todas sus mediciones son iguales, respondé las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la unidad de longitud que tomó cada chico?

b) ¿Cuánto mide el largo de la carpeta de Sergio, si la unidad es el pulgar de Federico?

c) ¿Cuánto mide el pulgar de Federico, si la unidad es el cordón de Adriana?

d) ¿Cuánto mide el cordón de Adriana, si la unidad es el largo de la carpeta de Sergio?

Problema 5

Julia tiene una tablita de madera y dice que cabe una cantidad justa de veces en el cordón de Adriana, y otra cantidad justa de veces en el largo de la carpeta de Sergio. ¿Cuánto puede medir la tablita de madera de Julia?

Capítulo 2. Comentarios sobre los problemas

Fracciones como medida y orden en Q^+

En este capítulo se presentan distintos problemas donde se busca determinar la medida de un segmento considerando otro como unidad. En todas las situaciones los dos segmentos involucrados son conmensurables. Es decir, son situaciones donde la medida obtenida resulta ser un número racional.

La idea que se pone en juego en estos problemas es que "si m veces un segmento a es igual a *n* veces un segmento *b*, a tiene una medida racional si se considera *b* como unidad, y viceversa".

Los primeros cinco problemas permiten abordar esta relación en contextos extramatemáticos. En el problema 6, se aborda directamente en el contexto numérico favoreciendo la explicitación de esta propiedad.

Para estos problemas de medida es esperable que en el aula coexistan respuestas exactas expresadas por fracciones y respuestas aproximadas expresadas por expresiones decimales –así como se anticipó, en el capítulo 1, al analizar los "problemas de pintura"–. Es un asunto que probablemente deberá volver a discutirse en clase: las diferencias y preferencias entre racionales y decimales. Esta discusión debería incluir el hecho de que, en el plano de la realidad, efectivamente alcanza con las aproximaciones decimales, mientras que en el modelo matemático, la respuesta precisa será un número racional.

A través del trabajo con los problemas de los diferentes capítulos, se espera que los alumnos puedan ir apropiándose de la conveniencia de recurrir a la expresión fraccionaria, tanto para la realización de ciertos cálculos como para comparar algunos números racionales.

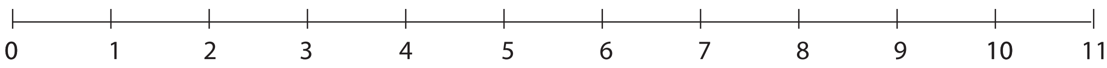
A continuación, se presentan tres problemas en el contexto de robots que caminan por una cinta graduada[5].

---

5 Adaptación de un problema presentado en el documento: Matemática. Fracciones y números decimales, 7º grado, Apuntes para la enseñanza, op. cit.

Problema 1

Un robot A se desplaza dando pasos sobre una recta como la siguiente:



Los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3.

a) Si el robot se para en el 6 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

b) Identificá 5 puntos de la recta donde pararía el robot, que no sean los que aparecen marcados con los números naturales, y asignale un número a cada uno de esos 5 puntos.

Otro robot, llamado B, da pasos de distinta longitud que el robot A. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

c) Si el robot está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

d) Si se colocan los dos robots en el 15 y comienzan a caminar hacia la derecha, ¿hay algún punto del trayecto en el que pisan los dos robots?

e) ¿Cuál es la relación entre los pasos de los dos robots?

Comentarios sobre el problema

Se supone que los alumnos ya han tenido en la escolaridad primaria alguna experiencia con la ubicación de números fraccionarios en la recta, aunque podemos esperar mucha diversidad sobre el grado de comprensión de esta conceptualización más geométrica (asociada a la magnitud longitud de segmentos) de lo numérico.

Si bien se están midiendo segmentos (los pasos de los robots), tomando como unidad cualquier segmento que tenga como extremos dos de los puntos marcados con números naturales consecutivos, esta cuestión puede permanecer implícita para responder a las distintas preguntas de este problema 1.

En la hoja que se les presenta a los estudiantes, la unidad marcada es de 1,3 cm. Se ha elegido este número para que una regla graduada, apoyada sobre el papel, no pueda servir como instrumento para responder las preguntas planteadas. Aunque es probable que los alumnos recurran a este instrumento para marcar el punto medio entre dos naturales consecutivos.

Podría ser que algunos alumnos resuelvan los ítemes a), b) o c) con números decimales, que en este caso dan la respuesta exacta. La idea es discutir en la clase acerca de otras representaciones de estos números. En particular, la pregunta **a)** podría dar lugar a discutir la equivalencia de las escrituras (algunas de ellas aportadas por el docente): 7,5; $7\frac{1}{2}$; $\frac{15}{2}$; $6+\frac{3}{2}$; 6 + 1,5; $\frac{75}{10}$; $7+\frac{1}{2}$. También sería interesante presentar y analizar otras escrituras incorrectas, como $\frac{7}{5}$, confundida con 7,5, o bien $\frac{9}{2}$ como resultado erróneo de $6+\frac{3}{2}$.

Las experiencias realizadas en las aulas muestran que muchos estudiantes necesitan discutir sobre estos asuntos para aclarar aspectos de la escritura y de los números que todavía no han comprendido. Es una buena oportunidad para hacerlo.

Para responder el ítem d), hay que considerar a los robots caminando indefinidamente y extender lo observado, necesariamente finito, realizando una anticipación de lo que va a pasar. En definitiva, hay que poder llegar a formular (y validar) que B pisa todos los pasos de A, y entonces los puntos de encuentro serían las pisadas de A.

En cuanto al ítem e), el enunciado puede ser interpretado de diferentes modos por los alumnos. Podrían identificar “relaciones” como: “es más lento el robot B que el robot A”, “los pasos no tienen la misma medida”, “los pasos de los robots son números decimales”. Como se decía en la introducción, puede ser necesaria una intervención del docente que oriente para encontrar una relación numérica entre los pasos de los dos robots.

Atendida esta cuestión, la comparación entre los pasos necesita de la consideración inicial de los dos robots parados en el mismo punto (el 0 ó el 3 ó el 6). Trabajando sobre el dibujo, los alumnos pueden constatar que tres pasos de uno corresponden exactamente a un paso del otro.

Para trabajar en el plano numérico, es necesario identificar con un número la medida de un solo paso de cada robot. Para esto, puede ser necesario preguntar por el número que asignarían a la primera pisada de cada robot, si ambos parten del 0. Las dos medidas obtenidas, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, permiten identificar que un paso equivale a tres del otro robot, como se puede ver en la escritura fraccionaria.

A continuación, en el problema 2, se presentan otros robots cuyos pasos tienen como medida un número racional. En este caso, las respuestas con números decimales serán aproximadas y los números periódicos aparecerán en escena.

La comparación que se solicita entre los pasos de los robots permitirá la producción de algunas estrategias para estudiar el orden en Q^+. El trabajo en la recta numérica y la puesta en juego de relaciones de proporcionalidad servirán para poder justificar las comparaciones.

No se apunta directamente a recordar y aplicar una regla de comparación de fracciones (los productos cruzados), que quizás algunos alumnos conozcan pero que, en general, suelen confundir con la regla para multiplicar y/o la regla para dividir dos fracciones. Como ya dijimos, la regla debe ser un punto de llegada, a partir de un trabajo adaptado a los números particulares que hay que comparar. En el proceso, otros criterios para comparar serán construidos en clase.

Problema 2

Se conocen ahora los datos de cinco robots más, C, D, E, F y G, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, de la siguiente manera:

C llega al	5 en	3 pasos
D llega al	5 en	9 pasos
E llega al	14 en	9 pasos
F llega al	10 en	6 pasos
G llega al	23 en	11 pasos

a) Ordená por tamaño, de menor a mayor, los pasos de los cinco robots. Explicá, con tus palabras, cómo hiciste para compararlos.

b) ¿Cuánto miden los pasos de cada robot? Ordená de menor a mayor los números que obtuviste.

Comentarios sobre el problema

En el enunciado de este problema se ha separado deliberadamente el ítem a) del b) para habilitar la posibilidad de realizar la comparación entre los pasos sin llegar a calcular la longitud de cada paso. Se analizará, a continuación, esta manera de encarar la comparación y, posteriormente, el recurso del cálculo –exacto o aproximado– de la longitud.

Por ejemplo, si se consideran los robots C y D, se puede argumentar que D da pasos más cortos, porque necesita más pasos para llegar al mismo lugar.
Se tiene hasta ahora: pasos D < pasos C

El robot E es fácil de comparar con el D: el E da pasos más grandes, pues llega más lejos con los mismos pasos. Falta compararlo con el C.

Para ello, se puede apelar a la proporcionalidad entre pasos y recorrido, y determinar que C llegaría al 15 en 9 pasos, por tanto, su paso es más grande que el de E.

Se tiene hasta ahora: pasos D < pasos E < pasos C.

Para ubicar los pasos de F, se puede volver a recurrir a la proporcionalidad y concluir que sus pasos son iguales a los de C.

Por último, mirando los valores del robot G se puede estimar que sus pasos son más grandes que todos: "en un paso salta más de dos rayitas, mientras que el C, el mayor, no llega a dos".

Finalmente, se obtiene el siguiente orden:
pasos D < pasos E < pasos C = pasos F < pasos G.

Algunos estudiantes suelen confundir el tamaño de un paso con el punto de llegada que se da como información; explican que el paso mayor es el de G (lo cual es cierto en este caso), y que el paso de F es mayor que el de C, pues llega más lejos. En estos casos, se puede proponer identificar el punto donde termina el primer paso de cada robot, o pintar el recorrido de un paso cualquiera para los robots involucrados.

Otra manera diferente de efectuar la comparación de los pasos es mediante el cálculo de la longitud de cada paso, es decir, responder a la pregunta b) para dar repuesta a a).

Es usual que los alumnos realicen las respectivas cuentas de dividir con la calculadora y consideren una o dos cifras después de la coma. La obtención de cada longitud sería aproximada pero, en este caso, permite ordenarlas correctamente. De todas maneras, sería pertinente que el docente gestione una discusión en torno de esta aproximación. Por ejemplo, puede proponer a los alumnos comparar los pasos del robot E con los de un nuevo robot H del cual se sabe que llega al 31 en 20 pasos. Para el robot E, el resultado que se obtiene es 1,555... mientras que para el robot H, 1,55. Si se hubieran considerado solamente dos cifras después de la coma, no se habría podido establecer la diferencia entre los pasos. Es decir, la intención de incorporar este nuevo robot es reconocer los límites del uso de las aproximaciones.

Otra posible intervención, ante la respuesta 1,55 para el robot E, es argumentar que si $\frac{14}{9}$ fuera igual a 1,55, debería verificarse que 1,55 x 9 = 14, cosa que no ocurre. Es decir, al multiplicar la cantidad de pasos por la medida del paso no se llega al número requerido. Un problema a tener en cuenta es que trabajando con la aproximación completa que da la calculadora (cualquier tipo de calculadora), si se efectúa 14 : 9 y luego, al resultado que aparece en el visor se lo multiplica por 9, se observa como resultado… ¡14! ¡La calculadora volvió a aproximar! Este tema requiere ser discutido con los alumnos.

El cálculo de la longitud de cada paso debería conducir a una pequeña discusión en clase acerca del significado de medir: para hacerlo hay que considerar una unidad de medida. Para este problema 2, es necesario acordar explícitamente que consideren al segmento entre 0 y 1 como unidad de medida. El problema de medir con diferentes unidades (no necesariamente las unidades convencionales) será retomado en el problema 4.

Relacionando las comparaciones hechas para los pasos con las medidas de los mismos, se espera llegar a formular diferentes criterios y estrategias para comparar las fracciones $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{23}{11}$ y $\frac{31}{20}$.

Estos criterios ya se han mencionado en el capítulo 1:

"Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador."
"Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador."

En este caso, se obtendría, por ejemplo, que:

- $\frac{5}{9} < \frac{14}{9}$ pues 5 < 14 (el sentido numérico de esta afirmación –hay más novenos en la fracción de la derecha– puede reforzarse, pensando en los robots, argumentando que se llega más lejos con la misma cantidad de pasos).

- $\frac{5}{3} > \frac{5}{9}$, pues como 3 < 9, un tercio es más grande que un noveno. Argumentando sobre los robots, con menos pasos, el robot de la izquierda llega al mismo lugar; luego, sus pasos son más grandes.

Para otras comparaciones es conveniente transformar una (o ambas fracciones) en otras equivalentes para poder aplicar alguno de los dos criterios anteriores.

Acerca de la noción de fracciones equivalentes

En los primeros "problemas de pintura" del capítulo 1, y en los dos que se analizaron recién, se pone en juego la noción de fracciones equivalentes o, lo que es lo mismo, de distintas escrituras fraccionarias de un número racional. Es un tema que se aborda en la escuela primaria. Sin embargo, es usual que los alumnos, intentando recordar una técnica, pierdan de vista el sentido de la noción.

A partir del trabajo realizado en la resolución de los problemas, es posible encarar una reflexión específica sobre esta noción.

Una primera idea a consolidar es que:
"si el numerador y el denominador de una fracción resultan de multiplicar numerador y denominador de otra por un mismo número natural, ambas fracciones son equivalentes, representan el mismo número racional".

Esta propiedad explica por qué se pueden simplificar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo divisor, sin modificar el valor de la fracción. Es probable que los alumnos conozcan esta regla, pero no es seguro que sepan por qué funciona.

Ahora bien, es necesario avanzar con ejemplos que muestren que esta condición que se enunció es suficiente pero no necesaria para determinar la equivalencia entre dos fracciones. Es decir, los alumnos deberían estudiar, por ejemplo, que $\frac{8}{12}$ y $\frac{10}{15}$ son equivalentes y no cumplen la condición anterior.

En consecuencia, sería necesario elaborar, entre todos, un nuevo enunciado que permita abarcar todas las situaciones posibles. Por ejemplo, un enunciado "completo" de la condición de equivalencia entre dos fracciones podría pasar por el hecho de que ambas, simplificadas, coincidan.

A la luz del conocimiento que se va produciendo en la clase, también sería pertinente discutir el criterio de "productos cruzados iguales", regla que es posible que muchos alumnos conozcan, y que ahora se estaría en condiciones de fundamentar.

A continuación, se presenta un tercer problema de robots, para consolidar lo trabajado.

Problema 3

Tenemos cinco robots llamados H, I, J, K, L, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, con pasos de la misma longitud, de la siguiente manera:

H llega al	8 en	3 pasos
I llega al	12 en	15 pasos
J llega al	4 en	2 pasos
K llega al	8 en	10 pasos
L llega al	18 en	9 pasos

Ordená de menor a mayor los robots, según la longitud de sus pasos. Explicá, con tus palabras, cómo comparaste cada número con los otros.

El problema siguiente tiene por objetivo discutir explícitamente la idea de que se puede medir tomando unidades de medida no convencionales.

Problema 4

Cuatro chicos midieron el largo del pizarrón de su aula y llegaron a las siguientes conclusiones:

Adriana midió con un cordón, y le dio 6 cordones.
Sergio midió con su carpeta, y le dio 10 "largos de carpeta".
Javier midió con la regla, y le dio 250 cm.
Federico midió con su pulgar, y le dio 50 pulgares.

Suponiendo que los cuatro chicos midieron bien el pizarrón y que, entonces, todas sus mediciones son iguales, respondé las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la unidad de longitud que tomó cada chico?

b) ¿Cuánto mide el largo de la carpeta de Sergio, si la unidad es el pulgar de Federico?

c) ¿Cuánto mide el pulgar de Federico, si la unidad es el cordón de Adriana?

d) ¿Cuánto mide el cordón de Adriana, si la unidad es el largo de la carpeta de Sergio?

Comentarios sobre el problema

En este problema se retoma el sentido de medir no como una acción, sino como el resultado de asociar un número a una magnitud, una vez que se consideró otra como unidad. Se podría ampliar el trabajo sobre esta temática con una invitación a los alumnos de propuestas de unidades de medida no convencionales para medir otro tipo de magnitudes, áreas o volúmenes.

La experiencia en las aulas muestra que algunos alumnos confunden la unidad de medida con el objeto utilizado para medir, y desde esta confusión responden que la unidad de medida que usó Javier es la regla.

Para las unidades que se presentan en este problema, los distintos resultados corresponden a números racionales.

Es probable que los alumnos recurran a "la regla de tres", como procedimiento válido para llegar a la repuesta. En muchos casos, es un recurso que "aplican" mecánicamente, sin un control del sentido que les permita discernir cuál es la operación correcta en cada caso. La experiencia muestra que muchos alumnos apelan al sentido de los elementos que se están comparando para plantear la fracción correcta, y no su inversa: por ejemplo, en el punto c) dijeron: "el pulgar es una parte del cordón, ya que un pulgar no puede medir todo un cordón; por tanto, 1 pulgar = $\frac{6}{50}$ de cordón".

Otra estrategia posible, y encontrada en el aula, es pasar todo a cm y buscar luego las medidas requeridas.

Se podría continuar lo trabajado en este problema con otra actividad que ponga en juego el hecho de componer unidades. Por ejemplo, una vez resuelto el ítem b) y el c), preguntar por la medida del largo de la carpeta de Sergio, si se considera como unidad el cordón de Adriana. Esta situación permitiría poner en escena el tema del producto de dos números fraccionarios, tema que se profundiza en el capítulo 4.

Como caso particular, podría preguntarse sobre la relación existente entre medir un objeto, por ejemplo la carpeta, tomando como unidad los cordones, y hacerlo al revés, la medida de un cordón, considerando como unidad la carpeta: se estaría trabajando sobre la noción de inverso de un número racional.

A continuación, presentamos un problema que tiene por objetivo la identificación de la siguiente propiedad:

Dados dos segmentos A y B, que verifican que k A = p B, para ciertos números naturales k y p; entonces existe un segmento C que es una medida común a A y B (es decir, existe un segmento C que entra una cantidad de veces exacta en A y otra cantidad de veces exacta en B).

Es una propiedad que valdría también para otras magnitudes que no sean la longitud, siempre que las dos magnitudes que se estudien cumplan la hipótesis que se pide para los segmentos: que un múltiplo de la primera se iguale a otro múltiplo de la segunda. La propiedad que se obtiene, tener una tercera magnitud que mide a las dos, se enuncia diciendo que son conmensurables. No se trata de que los alumnos retengan este nombre ni que la propiedad sea enunciada para luego "aplicarla" en problemas, sino que se explore a partir de la resolución de una situación.

El problema 5 se presenta como una continuación del problema de medidas de un pizarrón y apunta, entonces, a la identificación de la propiedad que se acaba de enunciar.

Problema 5

Julia tiene una tablita de madera y dice que cabe una cantidad justa de veces en el cordón de Adriana, y otra cantidad justa de veces en el largo de la carpeta de Sergio. ¿Cuánto puede medir la tablita de madera de Julia?

Comentarios sobre el problema

Del problema anterior, se debería haber llegado a la siguiente relación:

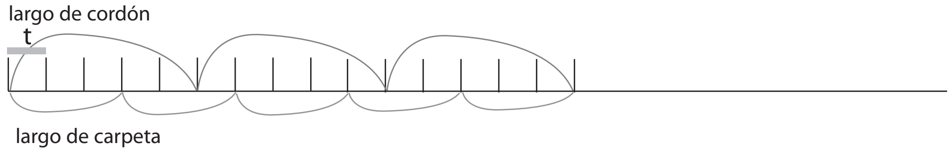
Como 6 cordones son iguales a 10 carpetas, longitud de un cordón = $\frac{10}{6}$ largo de carpeta.
Si se parte, entonces, el largo de carpeta en 6, se puede obtener una medida como la buscada. Una repuesta posible es, entonces, $\frac{1}{6}$ largo de carpeta. Pero hay más: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$ largo de carpeta, $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$ largo de carpeta ó $\frac{1}{4}$ de esta longitud, también sirven como respuesta al problema.

En un aula donde se puso en juego el problema 5, uno de los alumnos del curso dibujó en su carpeta lo que él consideraba la mitad del pizarrón y lo dividió en 15 partes iguales, ya que si:

$$1 \text{ pizarrón} \longrightarrow \begin{matrix} 6 \text{ cordones} \\ 10 \text{ largos de carpeta} \end{matrix}$$

$$\text{Entonces } \frac{1}{2} \text{ pizarrón} \longrightarrow \begin{matrix} 3 \text{ cordones} \\ 5 \text{ largos de carpeta} \end{matrix}$$

Usó el 15 como una cantidad posible de partir en 3 y 5, y agregó este dibujo:



Entonces, este alumno llegó a la conclusión de que $\begin{cases} 3 \,.\, t = 1 \text{ largo de cordón} \\ 5 \,.\, t = 1 \text{ largo de carpeta} \end{cases}$

La tablita es $\frac{1}{3}$ del largo del cordón y $\frac{1}{5}$ del largo de carpeta.

A la pregunta de "si puedo tomar la mitad de la tablita, ¿puedo medir a los dos?", una alumna contestó que sí, pues $t' = \frac{t}{2} = \frac{1}{6}$ largo de cordón.

El problema de la tablita y las medidas del pizarrón puede ser un punto de partida para la construcción de conocimientos más descontextualizados.

Un primer paso podría ser, siguiendo en el marco de los segmentos y de las longitudes, estudiar la siguiente situación:

- Si consideramos dos segmentos a y b que, respecto de cierta unidad, miden $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, ¿cuál podría ser una medida común a estos segmentos? Estudiar el mismo problema, pero con medidas $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{6}$, ¿cuál puede ser una medida común?, ¿y si las medidas son $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{5}$?

Un segundo paso sería dar lugar a una discusión sobre las cuestiones numéricas subyacentes, que podrían ser exploradas por los alumnos a partir de algunos ejemplos:

- Dados dos números racionales, $\frac{13}{6}$ y $\frac{25}{8}$, ¿se puede encontrar un tercer número racional X, de manera que $\frac{13}{6}$ sea un múltiplo (natural) de X y $\frac{25}{8}$, también?

- Si ahora consideramos dos números racionales cualesquiera, ¿siempre se puede hallar un número racional que esté contenido una cantidad entera de veces en los números anteriores? Si creés que se puede, proponé una forma de hacerlo para cualquier par de números y si no, da dos números para los cuales no exista una medida común.

Para terminar, es importante señalar que queda pendiente abordar la noción de inconmensurabilidad entre segmentos, con problemas como:

1. Hallar la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado.
2. Encontrar, si es posible, una medida común entre el lado y la diagonal de un cuadrado.

Este tipo de situaciones permite reflexionar sobre la necesidad de nuevos números para medir algunas longitudes. Se constituye, entonces, en una vía de entrada a la presentación de los números irracionales y la conformación del conjunto de números reales. Es una cuestión para abordar luego de haber trabajado en la consolidación del tratamiento de los números racionales. Sin embargo, es un asunto que podría surgir como pregunta al tratar los problemas que presentamos en este capítulo. En ese sentido, es importante que el docente lo tenga presente y, si lo cree conveniente, anuncie a sus alumnos que en un futuro esta problemática será objeto de estudio.

Para "atrapar" el problema de la inconmensurabilidad y la irracionalidad, será necesario alejarnos de contextos reales o situaciones de medida efectiva. Abordar esta temática aporta a la construcción de la noción de número racional –proceso que comenzó en la escuela primaria, pero que se profundiza en primero y segundo año– ya que permite identificar los límites de este conjunto de números para responder a problemas que plantea la matemática.