fepBA2020

Divisibilidad: múltiplos y divisores

SUGERENCIAS PARA SU ABORDAJE EN EL AULA

EQUIPO DOCENTE | 7.° GRADO

Matemática

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación
María Soledad Acuña

Director Ejecutivo de la
Unidad de Evaluación Integral
de la Calidad y Equidad Educativa
Gabriel Sánchez Zinny

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica
y Equidad Educativa
María Lucía Feced Abal

Subsecretario de Carrera Docente
Manuel Vidal

Subsecretario de Gestión Económico Financiera
y Administración de Recursos
Sebastián Tomaghelli

Subsecretaria de la Agencia
de Aprendizaje a lo largo de la Vida
Eugenia Cortona

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa

Coordinadora General de Evaluación Educativa
Lorena Landeo

Coordinadora Operativa de Evaluación de los Aprendizajes
Celina Armendáriz

Generalista
Florencia Zyssholtz

Equipo de Matemática
Carla Cabalcabué (coord.), Carolina Benito, Manuela Gutiérrez Böhmer,
Federico Maciejowski, María Jimena Morillo, Carla Saldarelli,
Ivana Skakovsky, Carina Tastzian

Todos los enlaces en línea mencionados en este documento fueron consultados el 20 de noviembre de 2019.

Coordinadora de Comunicación Narella Senra
Edición y corrección Gabriela Berajá, Irene Domínguez
Diseño gráfico Agustín Burgos, Adriana Costantino, Magalí Vázquez
Web Luca Fontana

UEICEE
Av. Paseo Colón 255
(C1063ACC) Ciudad Autónoma de Buenos Aires
ueicee@bue.edu.ar

Queridos/as docentes:

Quiero aprovechar esta oportunidad para saludarlos/as y **agradecerles por su esfuerzo y por el compromiso** que tienen todos los años con las evaluaciones que llevamos adelante en las escuelas de la Ciudad.

Es muy importante que nunca perdamos de vista que la evidencia nos marca el camino para la valoración, el diagnóstico y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Espero una vez más que puedan encontrar en estos materiales una herramienta útil para trabajar en el aula con los/as estudiantes y que continúen familiarizándose con estas pruebas.

Sigamos recorriendo juntos este camino de transformación de la educación en nuestra Ciudad.

María Soledad Acuña

Ministra de Educación de la
Ciudad Autónoma de Buenos Aires

A equipos directivos, docentes y comunidad educativa en general:

Sumarme a este equipo que trabaja por una mejor educación en la Ciudad representa un desafío que vivo con inmensa alegría.

Este año los/as seguiremos acompañando desde la Unidad con materiales que contribuyan a reforzar nuestra práctica evaluativa. La evidencia es nuestro punto de partida en este camino que tiene a los/as alumnos/as como protagonistas.

Gabriel Sánchez Zinny

Director Ejecutivo de la
Unidad de Evaluación Integral
de la Calidad y Equidad Educativa

Índice

Presentación

En 2020, la evaluación FEPBA (Finalización de Estudios Primarios en la Ciudad de Buenos Aires) de Matemática retomará la modalidad de trabajo implementada en 2019: propondrá a los alumnos, como es habitual, consignas que recuperan diferentes contenidos de los tres ejes del *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*[1] (Números y operaciones, Geometría y Medida) e incluirá, además, consignas para evaluar en mayor profundidad un tema en particular. Todos los estudiantes tendrán que responder un conjunto de consignas cerradas (de opción múltiple) y una abierta (de desarrollo) sobre algunos aspectos en relación con divisibilidad.

En 2019 se hizo llegar a las escuelas el documento *Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Una ocasión para abordar la transición entre prácticas aritméticas y algebraicas*, elaborado por el Ministerio de Educación e Innovación del Gobierno de la Ciudad,[2] en el que se hace hincapié en las diferentes formas de descomponer un número en factores para analizar la información que portan dichas descomposiciones. En base a estas actividades, se incluyeron en la prueba de ese año consignas que permitieron relevar información sobre las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver ese tipo de problemas.

Este año se profundizarán otros aspectos vinculados a la divisibilidad: las nociones de múltiplo, múltiplo común, múltiplo común menor (mcm), divisor, divisor común y divisor común mayor (DCM). En este documento, se presentan algunas sugerencias para un posible abordaje de estos conceptos en el aula. Resulta importante destacar que no se trata de una secuencia didáctica sino que se incluyen situaciones problemáticas que están organizadas respetando cierta progresión en la construcción de estos conceptos.[3] Para asegurar la apropiación de los mismos por parte de los alumnos es necesario incorporar otras actividades que complementen las de esta propuesta.

En primer lugar, se considera que, previo al abordaje de los múltiplos y divisores, debe haber un trabajo vinculado al análisis de la relación Dividendo = divisor × cociente + resto. Ante la necesidad de hacer un recorte, en este documento se ha decidido no desarrollar este aspecto. Esta relación se puede recuperar para considerar aquellos casos en los que el resto es 0 y por lo tanto, el dividendo es múltiplo del divisor y del cociente, dando lugar a una primera definición de múltiplo: *un número es múltiplo de otro si en la división del primero por el segundo el resto es cero*.

---

[1] GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2004) *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo*. Tomo 2.

[2] GCABA, Ministerio de Educación e Innovación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa (2018) *Matemática. Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Una ocasión para abordar la transición entre prácticas aritméticas y algebraicas*.

[3] Aquí se recuperan y articulan actividades propuestas en otros materiales didácticos publicados por el Ministerio de Educación e Innovación de la Ciudad, la Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación y el Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación. En cada caso, se incluyen las referencias y los enlaces correspondientes para favorecer el acceso a estas publicaciones.

Por otra parte, es probable que los alumnos de séptimo grado ya hayan tenido contacto con los conceptos de múltiplo y divisor de un número. También es esperable que los conocimientos que circulen al interior de cada aula sean heterogéneos. Por este motivo, se ha decidido comenzar con un juego conocido, que permite la participación de alumnos con distintos niveles de apropiación de estas nociones. Quienes las tengan menos afianzadas se enfrentarán al desafío de construirlas y quienes hayan alcanzado un mayor dominio podrán avanzar hacia prácticas argumentativas.

Asimismo, estas actividades permiten trabajar en forma articulada con los docentes de otros grados del segundo ciclo, tomando decisiones en conjunto en relación con los ajustes que se puedan realizar considerando el recorrido que ha tenido cada grupo.

1.

Sobre múltiplos y múltiplos comunes

La pulga y las trampas

Para comenzar el trabajo en torno a los múltiplos y múltiplos comunes, se propone un abordaje a partir del juego de *La pulga y las trampas*, disponible en *Matemática para Todos en el Nivel Primario*. *Notas para la enseñanza*, publicado por el Ministerio de Educación de la Nación en 2012.[4]

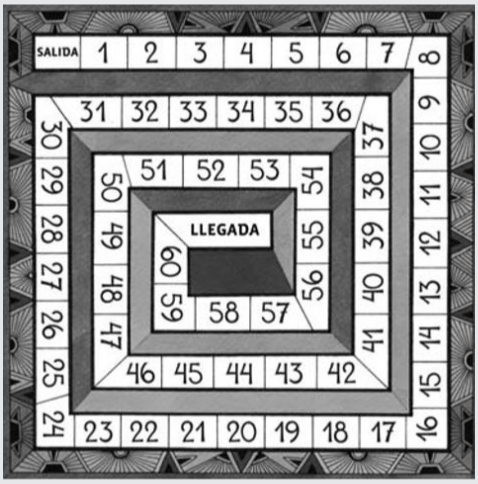
Este juego puede ser una interesante puerta de ingreso al trabajo en torno a los múltiplos, dado que permite la participación de alumnos que tengan distintos conocimientos previos sobre el tema. Aquellos niños que ya han utilizado los múltiplos de uno o varios números para resolver problemas, podrán reutilizar este concepto para diseñar estrategias y anticipar posibles jugadas y quienes aún no tengan disponibles estos conocimientos podrán comenzar a construirlos durante el desarrollo del juego. Cabe destacar que, si bien el juego se propone para iniciar el abordaje de los múltiplos, puede ser retomado en distintos momentos de la secuencia, dado que el trabajo que se vaya realizando y los intercambios que se vayan generando en la clase pueden alimentar nuevas formas de pensar las estrategias para jugar. Si los alumnos ya lo han jugado en años anteriores, se sugiere realizar alguna modificación en las reglas (como variar el tamaño de los saltos o extender la longitud del tablero) o bien comenzar con otra actividad.

A continuación, se presenta una adaptación de las reglas del juego propuestas en el material original.

El juego de *La pulga y las trampas*

Júntense en grupos de 4 compañeros y dentro de cada grupo formen 2 equipos de 2 chicos.

Para jugar, cada grupo va a necesitar 1 tablero, 40 fichas (pulgas) y 2 piedritas (trampas). Cada equipo recibirá 20 fichas y 1 piedrita.



[4] Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales*. Actividad 2, p. 31.

La pulga va a saltar sobre la tira y puede hacerlo con saltos iguales de 2 en 2 o de 3 en 3.

Uno de los equipos comienza colocando una trampa (piedrita) sobre uno de los números del tablero. Esta vez, van a jugar con los números del 1 al 20.

El otro equipo toma su pulga y elige con qué salto va a recorrer el tablero (de 2 en 2 o de 3 en 3) y hace avanzar la pulga con los saltos del tamaño que haya escogido, tratando de no caer en las trampas. Si la pulga logra atravesar todos los casilleros sin caer en la trampa, ese equipo se queda con su ficha; si cae en la trampa, tiene que entregársela al equipo contrario.

En la segunda vuelta, se alternan los roles: el equipo que había saltado con la pulga ahora pone la trampa **en un casillero diferente al que hayan ubicado la trampa anterior** y el que había puesto la trampa ahora toma la pulga y elige con qué salto va a recorrer el tablero. El equipo ganador será el que logre quedarse con más fichas.

En primer lugar, resulta importante destacar que el contexto del juego habilita a pensar los múltiplos de un número y de más de un número, porque las pulgas saltan de 2 en 2 o de 3 en 3. También permite trabajar con los múltiplos comunes, porque son los casilleros donde es conveniente colocar la trampa para asegurarse de que la pulga será atrapada.

Según las reglas del juego, se debe comenzar utilizando solo una porción del recorrido del tablero, los números del 1 al 20. Al hacerlo de este modo, los niños tienen la oportunidad de familiarizarse con dichas reglas. Si resulta muy sencillo, el docente podrá decidir extender la cantidad de números del tablero considerados en las primeras partidas.

Es importante destacar que, si bien se trata de un juego, este se enmarca en el contexto de la clase de Matemática. Por este motivo, será necesario proponer una modalidad de trabajo que implique no solamente jugar, sino también anticipar y reflexionar sobre lo realizado. Del mismo modo, el trabajo posterior resultará muy valioso para introducir el tema a tratar. En este sentido, se podrá pedir a los estudiantes que en cada partida registren en sus carpetas el salto que eligieron, el lugar donde ubicaron la trampa y si la pulga cayó o no en la misma. Estas anotaciones servirán para recuperar, en la puesta en común, las decisiones tomadas durante el juego y para analizar los mejores lugares donde colocar las trampas. También es posible analizar si es conveniente comenzar siendo el equipo que coloca la trampa o siendo el equipo que salta con la pulga.

Se sugiere realizar el juego más de una vez, de modo tal que los niños puedan comenzar a pensar algunas estrategias que les permitan ganar. Entre una vuelta y otra será interesante realizar puestas en común en las que se compartan algunos de los lugares en los que pusieron las trampas y si estas les permitieron atrapar a la pulga o no.

Para que la posibilidad de ganar una ficha sea equitativa, se deberá tener en cuenta que siempre puedan jugar ambos equipos. Esto se debe a que, por partida, solo podrá ganar una ficha uno de los dos equipos: el que coloca la trampa o el que salta (la pulga). Una vez que los chicos hayan jugado algunas rondas completas, el docente podrá proponer la tarea de escribir tres números que sean buenos para poner la trampa.

Si a esta altura del trabajo en torno al juego los alumnos aún no han advertido la estrategia para elegir los mejores casilleros para colocar la trampa, se sugiere no anticiparla dado que el juego tiene varias etapas y habrá nuevas actividades para reflexionar sobre este aspecto.

Después del juego

Luego de que hayan transcurrido algunas rondas del juego y de que tengan lugar los intercambios en el aula, se propone la realización de algunas actividades[5] en las que se evocará el juego pero no se jugará. Es importante destacar que estas actividades son las que permitirán reflexionar sobre lo realizado durante el juego y reutilizar las estrategias ya analizadas en las puestas en común. Por este motivo se sugiere, en un primer momento, que las mismas sean resueltas por escrito y en una segunda instancia, que el docente proponga una discusión colectiva donde se puedan contrastar las distintas resoluciones y explicaciones.

a) Fijate dónde ponen la trampa estos chicos y respondé para cada uno: ¿te parece que es un buen lugar para la trampa? ¿Por qué?
   - Matías puso la trampa en el 7.
   - Lucía puso la trampa en el 10.
   - Silvia puso la trampa en el 18.
   - Malena puso la trampa en el 15.

b) De los números del 1 al 20, hacé una lista con aquellos que:
   - sean los mejores para poner la trampa;
   - sean los peores para poner la trampa.

c) Si la tira de números fuera hasta el 30, ¿qué números de la tira convienen más para colocar la trampa? ¿Cuáles no convienen?

En la primera parte de la actividad se proponen 4 lugares distintos para colocar la trampa. Se espera que los alumnos puedan advertir que el mejor lugar para atrapar a la pulga es el que eligió Silvia, porque permite capturar tanto a las que saltan de 2 en 2 como a las que saltan de 3 en 3. Algo que resulta interesante analizar es que, mientras los saltos sean de 2 en 2 o de 3 en 3, el equipo que coloque la trampa siempre podrá atrapar a la pulga, eligiendo bien el lugar donde ubicarla.

Los casilleros elegidos por Lucía y Malena (el 10 y el 15, respectivamente) permiten a las pulgas no ser atrapadas, dependiendo del salto que se elija. En esta oportunidad, si la trampa está en el 10, la pulga deberá saltar de 3 en 3 para ganar y si la trampa está en el 15, tendrá que saltar de 2 en 2. Finalmente, el casillero elegido por Matías no es conveniente porque no atrapará a la pulga en ninguno de los casos.

[5] Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales.* Actividad 3, p. 31.

Es probable que los niños, en sus explicaciones, mencionen los lugares en los que pueden caer las pulgas. En este caso, será importante registrarlos para definir en este momento los múltiplos de 2 y de 3. Se pueden pintar en el tablero con un color los saltos de 2 en 2 y con otro, los de 3 en 3. Por ejemplo, se podría definir así:

Si la pulga salta de 2 en 2, caerá en los casilleros con los números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20. Estos casilleros en los que "cae" la pulga son ***múltiplos de 2*** *porque todos ellos se pueden escribir como 2 × "otro número".*

Por ejemplo, 16 es múltiplo de 2 porque 2 × 8 = 16.

Si la pulga salta de 3 en 3, caerá en los casilleros con los números 3, 6, 9, 12, 15 y 18. Estos casilleros en los que "cae" la pulga son ***múltiplos de 3****, porque se pueden escribir como 3 × "otro número".*

Por ejemplo, 18 es múltiplo de 3 porque 3 × 6 = 18.

En b) se avanza un poco más sobre lo realizado anteriormente. Esta actividad permite analizar que los mejores casilleros para colocar las trampas son aquellos que atrapan a ambas pulgas: 6, 12 y 18; y los peores casilleros son aquellos en los que no se puede atrapar nunca a la pulga: 1, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. Este mismo análisis se extenderá hasta el número 30 al responder la pregunta c).

Finalmente, se puede concluir que al colocar las trampas hay casilleros que no sirven para atrapar a las pulgas, hay otros que permiten atraparla dependiendo del salto que elija la pulga y otros que aseguran atrapar a la pulga, aunque salte de 2 en 2 o de 3 en 3. Dicho en otros términos:

- Si se quiere atrapar a la pulga que salta de 2 en 2, habrá que colocar la trampa en algún casillero que sea múltiplo de 2.
- Si se quiere atrapar a la pulga que salta de 3 en 3, habrá que colocar la trampa en un casillero que sea múltiplo de 3.
- Los peores casilleros para colocar la trampa son aquellos que tienen un número que no es múltiplo de 2 ni de 3.
- Los mejores casilleros para colocar la trampa son aquellos que tienen un número que es múltiplo de 2 y de 3 a la vez.

Luego de esta actividad se puede definir la noción de múltiplo para cualquier número natural. Una definición posible es:

> Un número natural es **múltiplo** de otro cuando es el resultado de multiplicar este último número por otro número natural.
>
> Por ejemplo, 10 es múltiplo de 2 porque 2 × 5 = 10
>
> 18 es múltiplo de 3 porque 18 es el resultado de multiplicar 3 × 6.
>
> También decimos que 18 es múltiplo de 3 porque 18 : 3 = 6 y el resto es 0.

Como se menciona en la última de las conclusiones anteriores, es probable que los alumnos ya hayan advertido que los mejores lugares para colocar la trampa son los casilleros que tienen un número que es múltiplo de 2 y de 3. Si esto sucede en el aula, puede ser un buen momento para definir la noción de ***múltiplo común***. De no ser así, habrá nuevas actividades que permitirán abordar este concepto.

Nuevas reglas del juego

Se sugiere realizar una nueva partida usando el tablero completo, es decir, con los números del 1 al 60, manteniendo las mismas condiciones para los saltos de las pulgas.

Esto permitirá reutilizar los conocimientos construidos hasta el momento, aplicándolos a una porción más extensa de la serie numérica. Asimismo, se pondrán en juego múltiplos de 2 y de 3 que superen el 2 × 10 y el 3 × 10, es decir, más allá de los múltiplos que se encuentran en las tradicionales "tablas del 2 y del 3".

Una vez que los alumnos hayan jugado algunas veces con el tablero completo, se propone seguir las reglas propuestas en la siguiente actividad.[6]

> Vuelvan a jugar a *La pulga y las trampas*, pero esta vez un equipo colocará dos trampas y el otro equipo hará saltar a la pulga de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 o de 5 en 5.

Como se advierte en las nuevas reglas, se pueden colocar dos trampas y la pulga puede dar saltos de 2, 3, 4 o 5 casilleros. Esto hace que el juego resulte más complejo ya que deben considerarse varias cuestiones a la vez.

Durante esta nueva pasada, también resulta conveniente que cada equipo registre en sus carpetas el salto que eligió, el lugar de las trampas y si cayó o no en alguna de ellas.

En esta instancia del juego, se espera que la estrategia propuesta por los alumnos para colocar las trampas involucre la noción de múltiplo común. Es decir, que puedan advertir que los mejores casilleros para colocar las trampas son aquellos que tienen un número que es múltiplo de uno o más de los números involucrados. También, que si eligen un casillero que no es múltiplo de ninguno de los números dados, nunca podrán atrapar a la pulga. Podría recuperarse la lista de casilleros que no eran buenos para poner las trampas cuando solo había saltos de 2 en 2 y de 3 en 3 y revisarla considerando los nuevos saltos.

Nuevamente resulta importante discutir después del juego que hay casilleros que son mejores que otros para colocar las trampas. El docente puede proponer algunos números de casilleros para colocar ambas trampas y preguntar si hay algún salto que garantice no caer en ellas. Por ejemplo:

---

[6] Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales*. Actividad 4, p. 33.

- *Si se colocan las trampas en los casilleros 20 y 40, ¿es posible que la pulga no sea atrapada? ¿Por qué?*
- *¿Y si se colocan las trampas en el 15 y en el 30?*

Con estas preguntas se espera que, entre todos, puedan proponer algunos casilleros que son buenos para colocar las trampas. Por ejemplo, se pueden ubicar en el 20 y en el 30 para que las pulgas siempre sean atrapadas.

Si el docente considera que en esta instancia el problema es muy complejo, puede reducir las opciones de salto para las pulgas. Por ejemplo, se puede proponer que la pulga salte de 2 en 2, de 3 en 3 y de 5 en 5. O también de 2 en 2, de 3 en 3 y de 4 en 4. Luego, en jugadas posteriores, se podrán incorporar todos los saltos mencionados.

Una vez analizados estos saltos, se sugiere discutir si habrá algún lugar donde pueda ponerse una sola trampa para atrapar a la pulga ya sea que salte de a 2, 3, 4 o 5 casilleros. Para responder esta pregunta, será necesario considerar los múltiplos comunes a los cuatro números. Una posibilidad es apoyarse en las listas de números que armaron para atrapar a las pulgas que saltan de a 2, 3 y 4 o de a 2, 3 y 5, revisar cada uno de los números y advertir si pueden atrapar a la pulga también al agregarse un cuarto tipo de salto. Resulta interesante discutir por qué se producen cambios en los buenos lugares para las trampas al agregarse saltos diferentes.

Después del juego

Para seguir reflexionando sobre el juego, se propone discutir en torno a las siguientes preguntas:[7]

> Para el equipo que coloca las trampas, ¿qué estrategia le permite ganar más fichas?
> ¿Y para el equipo que lleva las pulgas?

En esta segunda parte de la actividad se espera que, en el aula, estén disponibles estrategias vinculadas a la necesidad de buscar múltiplos comunes para colocar las trampas. Al tener dos trampas habilitadas, cada una de ellas podrá atrapar a pulgas que den diferentes saltos, ubicándolas en casilleros que sean múltiplos de dos números a la vez.

Si aún no ha surgido en el aula la idea de buscar un número que sea múltiplo de todos los saltos, el docente podrá instalar la pregunta: *¿Habrá algún casillero en el que se pueda colocar la trampa y que nos asegure ganar siempre?* Se espera que los alumnos puedan analizar que si se consideran los saltos de 2, 3, 4 y 5, y un tablero hasta el número 60, habrá un solo casillero que servirá para atrapar a las pulgas en todos los casos.

[7] Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales*. Actividad 4, p. 33.

Esto permite asegurar que, para el equipo que coloca las trampas, hay una estrategia ganadora: si se elige el casillero con el número 60, no importa cuál salto de los planteados se elija ya que la pulga siempre caerá en esa trampa. Con ayuda del docente, se espera que los alumnos puedan advertir que esto es así porque:

60 es múltiplo de 2 porque $2 \times 30 = 60$.

60 es múltiplo de 3 porque $3 \times 20 = 60$.

60 es múltiplo de 4 porque $4 \times 15 = 60$.

60 es múltiplo de 5 porque $5 \times 12 = 60$.

Al contrario de lo que sucede con el equipo que coloca las trampas, para el equipo que lleva la pulga no hay una estrategia que le asegure ganar siempre. Es decir, en esta oportunidad conviene comenzar colocando la trampa, para asegurarse de ubicarla en el número 60 y que ese casillero que garantiza ganar una ficha no pueda ser elegido luego por el otro equipo.

Para cerrar las discusiones que se proponen hasta aquí, será oportuno introducir una definición de múltiplo común y registrarla en las carpetas.

> Un ***múltiplo común*** es un número natural que es múltiplo de cada uno de los números de un grupo dado.
>
> Por ejemplo, 12 y 24 son múltiplos comunes a 2, 3 y 4.

Luego, se podrá proponer alguna actividad en la que deban determinar si ciertos números son múltiplos comunes a otros dados. Siempre es posible apoyarse en el contexto del juego y cambiar los saltos posibles para la pulga, poniendo en discusión los mejores lugares para poner las trampas.

Más actividades para después del juego

Luego de haber jugado algunas veces considerando las nuevas reglas (el tablero hasta el 60, la posibilidad de colocar dos trampas y una pulga que salta de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 o de 5 en 5) y de los intercambios que hayan surgido en la clase a partir de las rondas jugadas, puede proponerse la resolución individual de las siguientes actividades,[8] que pondrán en juego las estrategias utilizadas en esta instancia.

---

[8] Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales.* Actividad 5, p. 33.

En esta nueva versión del juego:

a) ¿Cómo pensaron las trampas? Escribí tu estrategia para ganar al colocarlas. ¿Por qué considerás que funciona tu estrategia?

b) Si la tira se extiende, y la pulga puede elegir saltar de a 2, de a 3, de a 4 o de a 5:

   › ¿podría caer en el 123? ¿Por qué?;

   › ¿y en el 137? ¿Por qué?

c) Si se sabe que la pulga cayó en el 122, ¿se puede saber de a cuánto saltaba?

d) Si la pulga avanza de 4 en 4, ¿llega justo al número 96? ¿Y al 1.234?

e) Explicá cómo se puede hacer para saber si la pulga va a caer o no en un número cualquiera.

En esta actividad se pretende reutilizar lo trabajado hasta aquí. En primer lugar, se pide escribir una estrategia que asegure ganar al colocar las trampas. Se espera que los alumnos, luego del recorrido realizado, puedan determinar que los mejores lugares para colocar las trampas son aquellos casilleros que son múltiplos de todos los saltos a la vez. Es decir, si la pulga puede saltar de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 o de 5 en 5, el mejor casillero para colocar la trampa es aquel que tiene un número que es múltiplo común entre 2, 3, 4 y 5. Si bien esto ya se ha discutido y analizado antes, aquí se ofrece una nueva oportunidad para que los alumnos puedan escribir una explicación con sus propias palabras.

En el caso de la pregunta b) se extiende el "límite" del tablero, invitando a imaginar uno nuevo con más casilleros. De este modo, habrá que reutilizar las conclusiones obtenidas hasta aquí e indicar si con saltos de a 2, de a 3, de a 4 o de a 5, es posible que la pulga caiga en los casilleros con los números indicados. Es importante tener en cuenta que lo que se pide en esta consigna, pero no se hace explícito, es analizar si los números 123 y 137 son múltiplos de 2, 3, 4 o 5. No es necesario que sean múltiplos de todos a la vez, sino que resulta suficiente que se alcancen esos números con alguno de los saltos considerados. Es decir, se espera que los alumnos puedan advertir, por ejemplo, que la pulga caerá en el 123 solamente si salta de 3 en 3, pero no caerá nunca en el 137 porque dicho número no es múltiplo de ninguno de los saltos posibles.

En el punto c) se invierte la pregunta. En este caso, se conoce el casillero en el que cayó la pulga y se debe averiguar cuál fue el salto elegido. Será necesario que los estudiantes analicen si es posible llegar a este casillero con alguno de los saltos propuestos, es decir, si el 122 es múltiplo de alguno de los números dados.

Por otra parte, en la consigna d) se pide explícitamente analizar si saltando de 4 en 4 se llega a los números dados. En este caso, las preguntas que están implícitas son: ¿96 es múltiplo de 4? ¿1.234 es múltiplo de 4? Es importante destacar que para resolver estas actividades no es necesario que los alumnos utilicen los criterios de divisibilidad, sino que pongan en juego diferentes estrategias para poder determinar si realizando saltos de 4 en 4 se puede llegar a los casilleros mencionados. Por ejemplo, una estrategia podría ser descomponer los números dados en sumandos que sean múltiplos de 4. En el caso del 96, podrían considerarlo como 80 + 16 y al 1.234 podrían descomponerlo como 1.200 + 34 o 400 + 400 + 400 + 32 + 2. Esas descomposiciones permiten advertir que 96 es múltiplo de 4 porque ambos sumandos lo son. En cambio, 1.234 no lo es porque no se puede escribir como suma de múltiplos de 4. Otra posibilidad es que, en cada caso, realicen la división y analicen si el resto es 0.

Finalmente, la actividad e) requiere un nivel mayor de generalidad y apunta a establecer algún "método" para determinar si la pulga puede o no caer en un determinado casillero. Es decir, se propone analizar cómo saber si un número es múltiplo de otro. Una estrategia que podría surgir es la que se analizó en el párrafo anterior, según la cual se divide el número del casillero dado por el que representa el salto de la pulga y se observa el resto de la división. Si este es 0, quiere decir que la pulga caerá en dicho casillero; si es diferente de 0, no caerá allí.

Hasta aquí se han abordado las nociones de múltiplo y múltiplo común a dos o más números. Las actividades que se han propuesto se enmarcan en torno al trabajo con el juego *La pulga y las trampas*. Además, en todas ellas se ha previsto una instancia de evocación del juego con el fin de definir los conceptos de múltiplo y múltiplo común.

Después de este trabajo, se pueden proponer nuevos problemas que requieran la búsqueda de múltiplos comunes en otros contextos. Por el momento, es esperable que los alumnos utilicen la estrategia de realizar saltos o listas de números para identificar aquellos números que se encuentran en ambas listas. Aún no se espera que realicen la descomposición en factores primos o utilicen un algoritmo para determinar el múltiplo común.

En muchas oportunidades, para obtener un múltiplo común, los niños multiplican los números dados entre sí. Ante esta estrategia se sugiere instalar las siguientes preguntas: *¿Es cierto que si se multiplican los números dados siempre es posible obtener un múltiplo común a ellos? ¿Realizando este cálculo se obtiene el menor de los múltiplos comunes?*

Si los alumnos no pueden responder a la segunda pregunta en este momento, se sugiere abordar algunos problemas que pongan en juego la noción de mínimo común múltiplo y retomar esa discusión a propósito de dichos problemas.

Para continuar el trabajo con múltiplos y múltiplos comunes

A continuación, se presentan tres problemas extraídos del *Proyecto Escuelas del Bicentenario: Matemática. Material para docentes. Quinto grado. Nivel Primario*, publicado por IIPE-Unesco[9] que proponen trabajar a partir de la noción de múltiplo de un número y avanzar hacia la búsqueda de múltiplos comunes.

[9] Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación, IIPE-Unesco (2012) *Proyecto Escuelas del Bicentenario: Matemática. Material para docentes. Quinto grado. Nivel Primario.* Actividades, p. 24.

a) Juan y Ernesto juegan con una pista de números que empieza en 0. Los dos comienzan con saltos hacia adelante. Juan los realiza de 5 en 5, en cambio, Ernesto los realiza de 7 en 7. ¿En qué números menores que 100 se van a encontrar?

b) Martina da saltos de 5 en 5 hacia adelante, comenzando en el 0. Lisandro da saltos de 12 en 12 hacia adelante, comenzando también en el 0. En el número 60, se encuentran.

   I) ¿En qué otros números volverán a encontrarse?

   II) ¿Se habrán encontrado en algún número anterior a 60?

c) Tres personas corren alrededor de un lago. Una tarda 4 minutos en dar la vuelta; otra tarda 6 minutos; y la tercera, 3 minutos. Si comienzan las tres a la misma hora, ¿cuántos minutos pasan hasta que se vuelven a encontrar las tres por primera vez? Si corren durante una hora, ¿cuántas veces coinciden?

Para responder a las preguntas, se podrá reutilizar lo trabajado en las actividades anteriores vinculadas con el juego de *La pulga y las trampas*, teniendo en cuenta que se trata de nuevos contextos.

En el primer caso, no se hace referencia al múltiplo común menor (mcm), sino a todos los múltiplos comunes a 5 y 7 que sean menores que 100, dando lugar a dos números posibles: 35 y 70. Es probable que los alumnos escriban dos listas, una con los múltiplos de 5 y otra con los múltiplos de 7, y busquen aquellos números que se encuentran en ambas listas. En este caso, si los niños no han advertido que los múltiplos comunes entre 5 y 7 se repetirán cada 35 números a partir del 35, es necesario que el docente explicite esta relación que podría no ser evidente.

En el segundo problema, hay que trabajar con los múltiplos de 5 y 12. En este caso, se ofrece un dato diferente: un número en el que ambos se encuentran, es decir, un múltiplo común entre ellos. Cabe destacar que este número se obtiene realizando 5 × 12. Para responder a la pregunta I) los alumnos podrían reutilizar lo realizado en el problema anterior y escribir algunos múltiplos de 60, asegurando que estos serán múltiplos comunes de 5 y 12. Se podría analizar en esta consigna si esta lista termina en algún momento, o cuál es el mayor número posible, con la intención de que los niños reconozcan que la lista es infinita. La pregunta II) obliga a "mirar hacia atrás" y analizar si habrá algún número menor que 60 que sea múltiplo de 12 y de 5. Aquí se puede concluir que el menor de los múltiplos comunes entre 5 y 12 es 60.

Algo importante a tener en cuenta en estas dos situaciones problemáticas es el hecho de que es posible hallar el mcm multiplicando entre sí los dos números dados. Por ejemplo, el mcm entre 5 y 7 es 35 y se puede obtener haciendo 7 × 5. También el mcm entre 5 y 12 es 60 y el mismo resulta de 5 × 12. Sin embargo, esto no es posible en todos los casos.

En el tercer problema, se pondrá en juego la noción de mcm y se podrá discutir la conjetura mencionada anteriormente. Cabe destacar que, en este caso se trata de reinvertir lo realizado en una situación diferente: el contexto remite a la velocidad con la que tres personas realizan un mismo recorrido y no se hace explícito que se comienza desde 0. Por otra parte, se deben considerar tres números en vez de dos. Nuevamente es necesario que los alumnos reconozcan que para resolver el problema deben considerar los múltiplos de 4, 6 y 3, y tener en cuenta los múltiplos comunes entre ellos. De este modo, pueden advertir que a los 12 minutos será la primera vez que se crucen y podrán ampliar la lista de múltiplos hasta hallar todos los comunes que sean menores que 60 o no continuar las listas y apoyarse en la idea de que siempre se cruzarán cada 12 minutos.

En este momento, se puede discutir sobre el hecho de que, en este caso, el mcm no se obtiene multiplicando los números involucrados, es decir, haciendo 4 × 6 × 3. Problemas como este permiten ponerlo en evidencia, dado que el mcm entre 4, 6 y 3 no es 72 sino 12.

Luego de trabajar actividades de este tipo, será importante registrar esto en las carpetas. Por ejemplo, se puede concluir que: *Siempre que se multipliquen entre sí dos o más números, se obtendrá un múltiplo común de todos ellos, pero no necesariamente será el menor.* Es necesario que esta discusión surja en algún momento del trabajo. En el caso de estos tres problemas, podría esperarse a la puesta en común del último de ellos, para ver si utilizan dicha estrategia y llegan a una respuesta incorrecta. Si esto no sucediera, se sugiere presentar la multiplicación 4 × 6 × 3 para iniciar el análisis de esta estrategia y decidir si es válida o no para hallar el mcm.

Después de abordar algunos problemas como estos, se sugiere introducir la definición de múltiplo común menor y registrar algunas estrategias posibles para hallarlo.

Un número es el ***múltiplo común menor (mcm)*** entre dos o más números si es el menor de los múltiplos comunes a dichos números.

Por ejemplo, el mcm entre 4, 6 y 3 es 12, porque es el menor múltiplo común de 4, 6 y 3.

2.

Sobre divisores y divisores comunes

Actividades para trabajar con divisores

Para iniciar el trabajo con divisores, se propone abordar algunos problemas como los siguientes:

a) Si partimos del número 35 y restamos sucesivamente 5, ¿se puede llegar al 0?
b) Si se resta varias veces 4 al número 50, ¿se puede llegar al 0?
c) Si se resta varias veces 6 al número 72, ¿se llega al 0?

Si bien estas actividades hacen referencia a las restas sucesivas de un mismo número, se propone discutir en la puesta en común si es posible responder a estas preguntas recurriendo a un procedimiento más económico. Se sugiere promover un intercambio sobre: *¿cómo se puede responder a estas preguntas sin realizar todas las restas?*

Se espera que algunos alumnos puedan anticipar que es posible recurrir a la división. En ese caso, habrá que analizar que la respuesta dependerá de lo que dé el resto. Es decir, se podrá llegar al 0 en aquellos casos en los que el resto de la división sea 0. El resto 0 indica que el número que se debe restar entra una cantidad exacta de veces en el número de partida. Por ejemplo, 5 entra 7 veces en 35, por eso se puede llegar a 0 al restar sucesivamente 5 al 35. Esto se debe a que 35 es múltiplo de 5 o, dicho de otro modo, a que 5 es divisor de 35. En este contexto, el cociente de la división indicará la cantidad de veces que se puede restar el número dado.

Todavía no se espera que los alumnos recurran a la noción de divisor, pero resulta interesante tener en cuenta que esta se pone en juego en estas actividades. Asimismo, es probable que no consideren en este caso la noción de múltiplo, ya construida y utilizada en actividades anteriores, dado que el problema refiere explícitamente a "restar".

En el caso de que tampoco surgiera la posibilidad de dividir, se puede sostener el uso de la resta hasta que se propongan otros problemas con números más grandes. A continuación, se presenta una situación problemática extraída del *Proyecto Escuelas del Bicentenario: Matemática. Material para docentes. Sexto grado. Nivel Primario*, publicado por IIPE-Unesco[10] que cumple con dicha condición y por lo tanto, provoca la necesidad de recurrir a alguna estrategia más económica.

Un juego consiste en escribir un número de tres cifras en la calculadora y restarle 4 todas las veces que se pueda. Se gana si en algún momento se obtiene 0.

a) Buscá dos números con los que estés seguro de ganar.
b) Comparalos con los de tus compañeros. ¿Todos pensaron los mismos números?
c) ¿Cuántos números ganadores habrá?
d) ¿Se gana con los números 500, 123, 560? ¿Por qué?

---

[10] Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación, IIPE-Unesco (2011) *Proyecto Escuelas del Bicentenario: Matemática. Material para docentes. Sexto grado. Nivel Primario*. Actividades, p. 11.

Este problema retoma lo trabajado en los anteriores pero presenta algunas variantes. Además de trabajar con números mayores, aquí se desconoce el número del cual se parte admitiendo muchas soluciones distintas. Estas modificaciones en el enunciado promueven otro tipo de exploración.

Para responder a la pregunta a) los alumnos podrían elegir cualquier número de tres cifras al azar y restar 4 tantas veces como sea necesario hasta ver si llegan a 0. El hecho de que los números sean más grandes que en la actividad anterior, promueve la aparición de otras estrategias como la posibilidad de agrupar más de un 4 y restar varios juntos. Por ejemplo, podrían restar múltiplos de 4 como el 40 o el 80. También podrían comenzar desde el menor número de tres cifras (100) y advertir que se obtiene 0. Luego, podrían probar con los números siguientes de uno en uno hasta identificar que el 104 también les permite llegar a 0, o saltar directamente del 100 al 104 para evitar los restos 1, 2 y 3. Otra estrategia posible es la de buscar "números redondos" de tres cifras que sean múltiplos de 4. Aunque no se espera que lo enuncien en dichos términos, es probable que entre los números propuestos se encuentren el 400 o el 800.

Para realizar la comparación con los números de sus compañeros (ítem b) y poder analizar si efectivamente se puede llegar a 0 partiendo de esos números y restando 4 todas las veces que sea posible, será necesario establecer alguna técnica que permita revisar las respuestas sin la necesidad de restar tantas veces 4. Se espera que, luego del trabajo con varias actividades similares a las presentadas previamente, los alumnos puedan advertir que deben dividir el número propuesto por 4 y el resto debe ser cero, es decir, la división debe dar exacta. Si esto no ocurriera, el docente podrá presentar esa solución como una estrategia propuesta por alumnos de otra escuela, para abrir la discusión sobre la posibilidad de utilizarla. En este sentido, en la pregunta b) se pretende llegar a la conclusión de que hay más de dos números de los cuáles se puede partir.

En el punto c) se propone profundizar este análisis, considerando qué cantidad de números ganadores habrá. Responder a esta pregunta implica poder analizar cuántos números de tres cifras son múltiplos de 4. Dado que la lista completa resulta muy extensa, se espera que los estudiantes abandonen ese camino y desplieguen alguna estrategia que les permita considerar porciones de la serie numérica para abreviar el conteo. Por ejemplo, *desde 100 hasta 139, ¿cuántos múltiplos de 4 hay? ¿Me sirve esto para saber cuántos múltiplos de 4 hay desde 100 hasta 179 o desde 100 hasta 199?*

Otra posibilidad es que analicen cada 100 números cuántos múltiplos de 4 hay, para extender esa relación al resto de los números de tres cifras. En este caso, podrían hacer la lista de dichos múltiplos o pensarlo del siguiente modo:

Desde 100 hasta 199 hay 25 múltiplos de 4 porque $25 \times 4 = 100$; $49 \times 4 = 196$ y $50 \times 4 = 200$. Entonces, 100 es el menor número de tres cifras con el cual se puede ganar porque se le resta 25 veces 4 y se llega al 0. 196 es el mayor número entre 100 y 199 con el cual se puede ganar porque se resta 49 veces 4 y se llega al 0. En síntesis, desde 100 hasta 199 hay 25 múltiplos de 4. Es decir, hay 25 números posibles a los que se les puede restar 4 sucesivamente para llegar al 0.

Esta relación puede extenderse a los números desde 200 hasta 299. Entre ellos hay 25 múltiplos de 4, porque 50 × 4 = 200 y 74 × 4 = 296. Esto permite concluir que:

- *Desde 100 hasta 199 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 200 hasta 299 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 300 hasta 399 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 400 hasta 499 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 500 hasta 599 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 600 hasta 699 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 700 hasta 799 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 800 hasta 899 hay 25 múltiplos de 4.*
- *Desde 900 hasta 999 hay 25 múltiplos de 4.*

Es decir, desde 100 hasta 999 hay 225 múltiplos de 4.

Otra estrategia más económica y que comienza con la búsqueda del menor y el mayor número posible de tres cifras que sea múltiplo de 4, es la siguiente:

El menor múltiplo de 4 de tres cifras es 100 porque 4 × 25 = 100.

El mayor múltiplo de 4 de tres cifras es 996 porque 4 × 249 = 996.

Todos los números posibles serán:

4 × 25

4 × 26

4 × 27

...

...

hasta 4 × 249

Desde 25 hasta 249 hay 225 números.

Si bien en esta instancia del problema se está trabajando a partir de la noción de múltiplo, es importante que el docente pueda comenzar a vincular este concepto con los nuevos a los que pretende llegar. La idea de buscar un número de tres cifras al que se le pueda restar varias veces 4 hasta llegar al 0 es equivalente a buscar un número de tres cifras que sea divisible por 4 o que tenga al 4 como uno de sus divisores.

Al discutir lo que los alumnos hayan pensado para responder a la pregunta d) es posible establecer el vínculo entre múltiplo y divisor. Para saber si se gana con los números propuestos los estudiantes pueden analizar si cada uno de ellos es múltiplo de 4. Para eso, la estrategia más económica es recurrir a la división, por ejemplo 500 : 4 y chequear que dé un valor exacto o que el resto sea 0. Ante esta resolución será necesario analizar que el resto 0 indica no solamente que 500 es múltiplo de 4, sino también que 4 es divisor de 500. Es importante destacar que, si los alumnos no eligen resolver el problema mediante una división, será necesario que el docente proponga esta resolución acompañándola de alguna explicación. Por ejemplo:

Se podrá ganar con los números 500 y 560 porque…

$$\begin{array}{r|l} 500 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 125 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 560 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 140 \end{array}$$

Al hacer 500 : 4*, el cociente indica que se puede restar 125 veces 4 al 500 para llegar al 0. Lo mismo sucede al hacer* 560 : 4*. Esa división permite advertir que se puede llegar a 0 restando 140 veces 4 al 560.*

Con el número 123 no se puede llegar al 0 porque…

$$\begin{array}{r|l} 123 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 30 \end{array}$$

Al hacer 123 : 4 *se advierte que se puede restar 30 veces 4 y el último número al que se llega es 3.*

Al realizar estas divisiones, se puede concluir que el 4 es divisor de 500 y 560 pero no de 123, es decir, que se puede dividir a los dos primeros números por 4 y que la división sea exacta, mientras que el resto es diferente de 0 para el caso del 123.

Para seguir avanzando en la construcción del concepto de divisor, se propone una adaptación de una situación problemática extraída de *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática*, publicado por el Ministerio de Educación e Innovación del Gobierno de la Ciudad:[11]

> Un juego consiste en partir de un número de tres cifras y llegar a cero restando siempre un mismo número todas las veces que sea posible. Si el número de partida es 192, ¿cuál o cuáles de los cuatro números siguientes permitirá llegar a 0?
>
> 4 3 5 10

Este problema es similar a los presentados anteriormente. Sin embargo, en este caso lo que se desconoce es el número que se resta. Esta situación, permite avanzar hacia el concepto de divisor, dado que se puede analizar si algunos de los números propuestos (4, 3, 5 y 10) son divisores de 192.

A partir del trabajo con la actividad anterior, se espera que los alumnos puedan saltear la estrategia de las restas sucesivas y anticipen que se podrá llegar a 0 en los casos en los que la división sea exacta. Para esto los estudiantes podrán analizar si el 192 es múltiplo de cada uno de los números dados realizando las divisiones correspondientes.

[11] GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa (2019) *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática*, p. 58.

Si los alumnos resolvieran haciendo referencia a la noción de múltiplo, será tarea del docente relacionarlo con la de divisor. Generalmente estos conceptos se ven en forma conjunta dado que ambos están vinculados y se pueden definir a partir de la misma relación.

Se podrá plantear lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 192 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 48 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 192 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 64 \end{array}$$

Como 192 : 4 = 48, entonces a 192 se le puede restar 48 veces 4 y llegar al 0. En este caso, decimos que 4 es divisor de 48 porque la división es exacta.

Como 192 : 3 = 64, entonces a 192 se le puede restar 64 veces 4 y llegar al 0. En este caso, decimos que 3 es divisor de 192.

$$\begin{array}{r|l} 192 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 38 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 192 & 10 \\ \cline{2-2} 2 & 19 \end{array}$$

No es posible llegar al 0 restando el número 5 porque después de hacerlo 38 veces se llega al número 2. Lo mismo sucede con el 10, después de restarlo 19 veces.

Después de realizar y analizar las cuatro divisiones, sería interesante arribar a conclusiones como las siguientes.

El 3 y el 4 son divisores de 192 porque al dividir al 192 por cada uno de esos números, la cuenta es exacta, es decir, el resto es 0. En cambio, al dividir el 192 por 5 y por 10, el resto es 2. Por lo tanto, 5 y 10 no son divisores de 192.

Llegado este momento, se sugiere introducir una definición de divisor:

Si un número natural es múltiplo de otro, se dice que el segundo es divisor del primero y que el primero es divisible por el segundo.

También, si al dividir un número por otro el resto es 0, se dice que el segundo número es divisor del primero.

Por ejemplo, al realizar la cuenta 192 : 3 se obtiene 64 como cociente y resto 0. Entonces se puede decir que:

› 3 es divisor de 192.

› 192 es múltiplo de 3.

› 192 es divisible por 3.

Al realizar la cuenta 192 : 10 se obtiene cociente 19 y resto 2, entonces se puede decir que:

› 10 no es divisor de 192.

› 192 no es múltiplo de 10.

› 192 no es divisible por 10.

Otros contextos para trabajar con divisores

Luego de las primeras actividades en las que se ha comenzado a trabajar con el concepto de divisor, se sugiere proponer otros contextos que permitan reutilizarlo. Por ejemplo, los problemas de organizaciones rectangulares ofrecen una buena oportunidad para seguir avanzando en la construcción de esta noción.

a) En un espectáculo, los organizadores tienen que acomodar 40 sillas. Una de las formas que eligieron para acomodarlas es armar 2 filas de 20 sillas cada una, pero están evaluando otras posibilidades. Si quieren colocar la misma cantidad de sillas en cada fila y que no sobre ninguna, ¿de qué otra forma podrán colocarlas? Escriban todas las formas en las que se pueden colocar las sillas.

b) Si en lugar de 40 sillas, la cantidad total es de 120. Escriban todas las formas en las que se pueden colocar las sillas, teniendo en cuenta siempre que en todas las filas haya la misma cantidad de sillas y que no sobre ninguna.

c) ¿Es posible acomodar 42 sillas en 5 filas de manera que en cada fila haya la misma cantidad de sillas y no sobre ninguna?

d) Escriban todas las maneras de acomodar 31 sillas de modo que cada fila tenga la misma cantidad de sillas, sin que sobre ninguna.

Los problemas a) y b) requieren encontrar todos los divisores de los números dados. Es importante tener en cuenta que esto no se explicita en la consigna y, si los estudiantes no lo han advertido, en un principio será necesario dejar que exploren y propongan las posibles formas de ubicar las sillas para luego ayudarlos a indagar si estas son todas las formas posibles de ubicarlas.

Para cada una de estas formas se puede plantear lo siguiente:

Con 40 sillas:

1 fila de 40 porque 40 : 1 = 40 *o bien* 1 × 40 = 40.

2 filas de 20 porque 40 : 2 = 20 *o bien* 2 × 20 = 40.

4 filas de 10 porque 40 : 4 = 10 *o bien* 4 × 10 = 40.

5 filas de 8 porque 40 : 5 = 8 *o bien* 5 × 8 = 40.

8 filas de 5 porque 40 : 8 = 5 *o bien* 8 × 5 = 40.

10 filas de 4 porque 40 : 10 = 4 *o bien* 10 × 4 = 40.

20 filas de 2 porque 40 : 20 = 2 *o bien* 20 × 2 = 40.

40 filas de 1 porque 40 : 40 = 1 *o bien* 40 × 1 = 40.

Del mismo modo se puede realizar un análisis para 120 sillas.

En ambos casos, se puede concluir que para que sea posible distribuir todas las sillas en filas con la misma cantidad de sillas en cada una, es necesario que la cantidad de filas sea divisor de la cantidad total de sillas.

Por otra parte, en la pregunta c), es posible que los alumnos reconozcan que el 42 no es múltiplo de 5 porque no termina en 0 ni en 5. Si no tuviesen presente esta regularidad, podrían buscar un número que al multiplicarlo por 5 dé como resultado 42. En este caso se obtendrá que $8 \times 5 = 40$ y $9 \times 5 = 45$ por lo tanto no es posible acomodar 42 sillas en 5 filas. También, podrían recurrir a la división 42 : 5 y advertir que el resto 2 indica que no se puede colocar la misma cantidad de sillas en cada fila sin que sobre ninguna. Si este modo de resolver no surge por parte de los alumnos, el docente podrá proponerlo y vincularlo con el concepto de divisor al concluir que, en este caso, no es posible armar filas que tengan todas la misma cantidad de sillas porque 5 no es divisor de 42.

Finalmente, para resolver la consigna d), si hay 31 sillas, hay dos posibilidades: 1 fila de 31 sillas o 31 filas con una silla cada una. Esto se debe a que los únicos divisores del número 31 son 1 y 31.

Otro contexto que resulta interesante para abordar el concepto de divisor es el del reparto y la partición. Se proponen algunos ejemplos a continuación:

a) Se están armando bolsitas con caramelos, con la condición de que en todas las bolsitas haya la misma cantidad de caramelos y no sobre ninguno. Si se tienen 36 caramelos, ¿de cuántas formas se podrán armar las bolsitas?
b) Si en lugar de 36 caramelos, la cantidad de caramelos es 100. Escriban todas las formas posibles en las que se pueden armar las bolsitas.
c) Con 60 caramelos, ¿es posible armar 18 bolsitas y que no sobre ninguno?
d) Con 60 caramelos, ¿es posible armar 12 bolsitas y que no sobre ninguno?

Se espera que al trabajar en torno a estos problemas, se realice un análisis similar al mencionado en el caso de las organizaciones rectangulares, dirigiendo la mirada hacia la búsqueda de divisores de los números de caramelos propuestos en cada caso.

Luego de abordar el concepto de divisor en diferentes contextos, se propone un trabajo intramatemático para explorar la búsqueda de divisores. Este tipo de actividades resulta fundamental dado que, en general, los alumnos realizan prácticas más cercanas a la búsqueda de múltiplos, sobre todo porque han tenido diferentes acercamientos a “las tablas de multiplicar” o a la tabla pitagórica.

Estrategias para buscar divisores

Se propone aquí una colección de problemas extraídos de *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza*, publicado por el Ministerio de Educación de la Nación en 2012[12] que puede ser complementada con la secuencia de actividades del documento *Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones*, elaborado por el Ministerio de Educación e Innovación del Gobierno de la Ciudad.[13]

a) Sara dice que para buscar los divisores de un número ella escribe varias cadenas desarmando el número en factores. Para 24 hace así:

24	24	24
8 × 3	12 × 2	6 × 4
2 × 4 × 3	6 × 2 × 2	3 × 2 × 2 × 2
2 × 2 × 2 × 3	3 × 2 × 2 × 2	

Mirando lo que hizo Sara, anotá todos los divisores de 24.

¿Te parece que el método de Sara sirve para otros números? Pensá algún ejemplo.

b) Mariano dice que, para buscar los divisores de un número, él piensa los divisores por pares porque si un número se escribe como producto de dos factores, cada factor es divisor del número. Por ejemplo, para 12 piensa 4 × 3, 2 × 6 y 1 × 12. ¿Te parece que el método de Mariano sirve para otros números? Pensá algún ejemplo.

c) Silvia dice que para buscar los múltiplos ella no encuentra un método que le permita escribir todos. ¿Por qué te parece que le pasa eso?

En estas actividades se abordan diferentes descomposiciones de un mismo número. Se espera que luego de trabajar con actividades de este tipo, los alumnos puedan comprender que para un mismo número puede haber varias descomposiciones multiplicativas y que todos los factores de dichas multiplicaciones son divisores del número original. Sin embargo, si la descomposición es en números primos, esta será la única. Es decir, dado un número hay una única manera de escribirlo como producto de números primos. Más adelante, esto será utilizado para realizar los algoritmos que permiten encontrar el mcm y el DCM de dos o más números, pero también servirá de base para avanzar hacia otros conceptos en la escuela secundaria.

Por otra parte, se analizan las diferencias entre los múltiplos y los divisores de un mismo número. Mientras que la cantidad de divisores de un número es finita, la cantidad de múltiplos de un número es infinita.

---

[12] Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales*, p. 37.

[13] GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, SSPLINED, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum (2018) *Matemática. Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Una ocasión para abordar la transición entre prácticas aritméticas y algebraicas.* Actividad 8, p. 37. Este documento se hizo llegar a todas las escuelas primarias de la Ciudad de Buenos Aires en 2019, como material anticipatorio y de familiarización con algunos aspectos de la evaluación FEPBA.

Además, entre todos los divisores de un número, el mismo número es el mayor de todos los divisores. Por ejemplo, entre todos los divisores de 24, el 24 es el mayor divisor. Mientras que entre todos los múltiplos de un número (distintos de 0) el menor de los múltiplos es el número dado. Por ejemplo, entre todos los múltiplos de 24, 24 es el menor de los múltiplos (si no consideramos al 0 que es múltiplo de todos los números).

Luego de analizar las diferentes formas de descomponer un número se pueden proponer actividades como esta adaptación de una situación problemática publicada en *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza*, del Ministerio de Educación de la Nación.[14]

> Descomponé en factores el 60 y el 72.
>
> › ¿Hay números que sean divisores de 60 y de 72?
>
> › ¿Hay números que sean divisores de 72 pero no de 60?
>
> › ¿Y que sean divisores de 60 pero no de 72?

Esta actividad pretende reutilizar las estrategias propuestas en los problemas anteriores para hallar divisores de un número y avanzar sobre la identificación de divisores comunes y no comunes a dos números dados. Todavía no se espera que los alumnos utilicen los algoritmos tradicionales para hallarlos, sino que se basen en las descomposiciones en factores del 60 y del 72 y que luego observen cuáles de los factores se repiten en ambas descomposiciones y cuáles no. Esta primera búsqueda de divisores comunes, servirá de apoyo para la resolución posterior de diversas situaciones problemáticas.

[14] Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales*. Actividad 8, p. 37.

Problemas de divisores comunes

A continuación, se propone un problema para trabajar con divisores comunes:

Una librería prepara cajas con útiles: cuadernos, reglas y lapiceras. En total hay 180 cuadernos, 36 reglas y 144 lapiceras. Para armar las cajas se tendrán en cuenta las siguientes condiciones:

- › En todas las cajas debe haber la misma cantidad de cuadernos.
- › En todas las cajas debe haber la misma cantidad de reglas.
- › En todas las cajas debe haber la misma cantidad de lapiceras.
- › No pueden quedar artículos sin repartir.

Respondé las siguientes preguntas calculando, cuando sea posible, la cantidad de cuadernos, reglas y lapiceras que habrá en cada caja. Cuando no sea posible, explicá por qué.

a) ¿Se pueden armar 5 cajas con estos útiles?

b) ¿Se pueden armar 6 cajas con estos útiles?

c) ¿Cuál es la mayor cantidad de cajas que se puede armar con estas condiciones?

Si bien no se explicita en la consigna, lo que se propone en este problema es un trabajo con los divisores comunes de los números 180, 36 y 144. Este trabajo incluye también la utilización de divisores no comunes y del máximo común divisor. Se recomienda que los alumnos comiencen explorando el problema y que esto no sea mencionado por el docente en una primera instancia. Se puede resolver primero la consigna a), realizar una puesta en común y luego continuar con las consignas b) y c).

En la pregunta a) los estudiantes deben analizar si es posible repartir los útiles mencionados en 5 cajas. En este caso, no será posible porque 5 no es divisor de los números 36 y 144. Si los alumnos ya advirtieron que la resolución implica analizar si los números 180, 36 y 144 se pueden dividir por 5 sin que sobre nada, es probable que justifiquen diciendo que el 36 "no está en la tabla del 5" y por este motivo no es posible repartir los útiles en las 5 cajas.

Independientemente de las resoluciones correctas, es importante que el docente, en la puesta en común, pueda explicitar las razones por las cuales no es posible repartir los útiles en términos de divisores y no solamente de múltiplos. Por ejemplo, al realizar los siguientes cálculos:

180 : 5 = 36 *y el resto es 0. Los cuadernos se pueden repartir en 5 cajas.*

36 : 5 = 7 *y el resto es 1. Las reglas no se pueden repartir en 5 cajas, porque sobraría 1 regla.*

144 : 5 = 28 *y el resto es 4. Las lapiceras no se pueden repartir en 5 cajas, porque sobrarían 4.*

Un posible error es que los alumnos sumen todas las cantidades 180 + 36 + 144 = 360 y a este resultado lo dividan por 5. Es decir, 360 : 5 = 72. Esta resolución no es correcta porque no se tiene en cuenta que la cantidad de útiles de cada tipo debe ser la misma. Al sumar los tres números, están considerando todos los útiles sin diferenciarlos y al dividir ese resultado por 5, se obtiene la cantidad de útiles que se pondrá en total en cada caja, pero no se puede diferenciar cuántos útiles de cada tipo habrá en cada una de ellas. Entonces, para que quede en evidencia que dicha resolución no permite responder a la pregunta, se puede abrir la discusión sobre: *¿Cuántos cuadernos, reglas y lapiceras pondrán en cada caja?*

Después de realizar una puesta en común de la parte a), se espera que los alumnos cuenten con más herramientas para resolver los puntos b) y c), dado que ya sabrán que la cantidad de cajas debe ser un divisor común a las cantidades de cada uno de los tres útiles, para que la distribución sea posible.

Por lo tanto, para responder a la pregunta b), los estudiantes deben analizar si 6 es divisor de cada uno de los números dados. En este caso, es posible armar 6 cajas porque:

180 : 6 = 30 *y el resto es 0. Se pueden armar 6 cajas con 30 cuadernos.*

36 : 6 = 6 *y el resto es 0. Se pueden armar 6 cajas con 6 reglas.*

144 : 6 = 24 *y el resto es 0. Se pueden armar 6 cajas con 24 lapiceras.*

Entonces, en cada caja habrá 30 cuadernos, 6 reglas y 24 lapiceras.

La pregunta c) cambia respecto de las anteriores porque, en este caso, no se indica la cantidad de cajas sino que los alumnos tienen que proponerla cumpliendo con la condición de que sea la mayor cantidad posible. Para esto deben buscar los divisores comunes de los números dados y determinar el mayor de ellos.

De este modo, una vez que adviertan que el 36 es el divisor común mayor, aunque todavía no lo expresen en estos términos, tendrán que comprender lo que dicho 36 representa en el contexto de este problema y calcular cuántos útiles de cada tipo habrá en cada una de las cajas.

En este caso, se trata de 36 cajas dentro de las cuales habrá:

180 cuadernos : 36 cajas = 5 cuadernos por caja.

36 reglas : 36 cajas = 1 regla por caja.

144 lapiceras : 36 cajas = 4 lapiceras por caja.

Un error habitual en la interpretación de este tipo de situaciones problemáticas consiste en hallar correctamente el divisor común mayor, en este caso 36, pero considerar que dicho número representa la cantidad de elementos que habrá en cada caja en vez de la cantidad de cajas. De este modo, la respuesta a la que arriban es: 5 cajas de 36 cuadernos cada una, 1 caja con 36 reglas y 4 cajas con 36 lapiceras cada una. Para revisar esta respuesta, será necesario volver sobre el enunciado del problema y poner en discusión si se cumplen las pautas allí indicadas, hasta que adviertan que de esa manera las cajas no tienen los tres tipos de útiles.

Cabe aclarar que errores de este estilo son habituales, dado que los enunciados de problemas extramatemáticos en los que se debe buscar el máximo común divisor, suelen resultar complejos. Si bien, en muchas oportunidades, los problemas en contextos extramatemáticos facilitan el tratamiento de ciertos temas, en este caso en particular, al omitir los términos "divisor común" o "divisor común mayor" en el enunciado, la descripción de las condiciones para la búsqueda del mismo puede resultar extensa y de difícil interpretación.

A continuación, se propone un juego que permite abordar la búsqueda de divisores comunes y el divisor común mayor, saliendo de la estructura de los problemas habituales.

Se puede trabajar con todo el grado o en grupos más pequeños. Se recomienda jugar en grupos de 4, formando dos parejas.

> El docente propone dos números, por ejemplo: 80 y 64.
>
> El juego consiste en llegar al 0 restando sucesivamente la misma cantidad a ambos números. Cada una de las veces que se resta el mismo número recibirá el nombre de "salto".
>
> Gana el juego la pareja que realice menos saltos para llegar al 0.

En una primera instancia del juego, se propone dejar de lado la restricción de que debe ser la menor cantidad de saltos posibles, dando lugar a que propongan cualquiera de todos los saltos posibles para llegar al 0. De este modo, se consideran todos los divisores comunes a 80 y 64 (1, 2, 4, 8 y 16) que representan los saltos posibles.

En un segundo momento, se sugiere volver a jugar con la menor cantidad de saltos, es decir, que el salto sea el más largo posible. En este caso, de a 16 números.

Es conveniente repetir el juego varias veces más con diferentes pares de números, de modo que los alumnos tengan la oportunidad de reutilizar y revisar las estrategias de la primera ronda.

Se espera que, en la puesta en común, los alumnos puedan anticipar que el mejor salto para ganar el juego será el número que corresponda al máximo común divisor de los números dados. Una vez llegado a este acuerdo, se sugiere proponer actividades para después del juego como las siguientes:

> Los números dados son 180 y 126.
>
> a) La pareja A eligió dar saltos de a 6. ¿Ganarán el juego?
>
> b) Si jugaras contra la pareja A, ¿qué salto elegirías?

Después de haber abordado actividades como las anteriores en las que se discuta sobre la posibilidad de buscar divisores comunes y el divisor común mayor, se propone introducir dichos conceptos:

Un **divisor común** es un número natural que es divisor de cada uno de los números de un grupo dado.

Por ejemplo, 4 es divisor de 24, 40 y 96.

Un número es el **divisor común mayor** (DCM) entre dos o más números si es el mayor de los divisores comunes a dichos números.

Por ejemplo, el DCM entre 24, 40 y 96 es 8, porque es el mayor divisor común de 24, 40 y 96.

En este material se han propuesto actividades orientadas a abordar el tratamiento de múltiplos y divisores en el aula, como opciones que admiten ajustes, nuevas combinaciones y adaptaciones. Se trata de una invitación para que cada docente desarrolle un recorrido que considere desafiante y apropiado para el grupo de estudiantes.

Bibliografía

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa (2019) *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática.* Disponible en bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/532-progresiones-de-los-aprendizajes-segundo-ciclo-matematica

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, SSPLINED, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum (2018) *Matemática. Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Una ocasión para abordar la transición entre prácticas aritméticas y algebraicas.* Disponible en bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/531-matematica-divisibilidad-de-las-operaciones-a-la-construccion-de-anticipaciones-septimo-grado

GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2004) *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo*. Tomo 2. Disponible en bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/153-diseno-curricular-para-la-escuela-primaria-segundo-ciclo-de-la-escuela-primaria-educacion-general-basica-edicion-ano-2004-tomo-2

Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación, IIPE-Unesco (2011) *Proyecto Escuelas del Bicentenario: Matemática*. *Material para docentes. Sexto grado. Nivel Primario.* Disponible en servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/programa_para_el_acompaniamiento_y_la_mejora_escolar/materiales_de_trabajo/docentes/matematica_sexto_grado.pdf

Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación, IIPE-Unesco (2012) *Proyecto Escuelas del Bicentenario: Matemática. Material para docentes. Quinto grado. Nivel Primario.* Disponible en servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/programa_para_el_acompaniamiento_y_la_mejora_escolar/materiales_de_trabajo/docentes/matematica_quinto_grado.pdf

Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para Todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales.* Disponible en bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/599-matematica-para-todos-en-el-nivel-primario-notas-para-la-ensenanza-operaciones-con-numeros-naturales-fracciones-y-numeros-decimales

Se terminó de imprimir en el mes
de enero de 2020, en Imprenta GCBA,
en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Vamos Buenos Aires

Ministerio de Educación
de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Unidad de Evaluación Integral
de la Calidad y Equidad Educativa
ueicee@bue.edu.ar